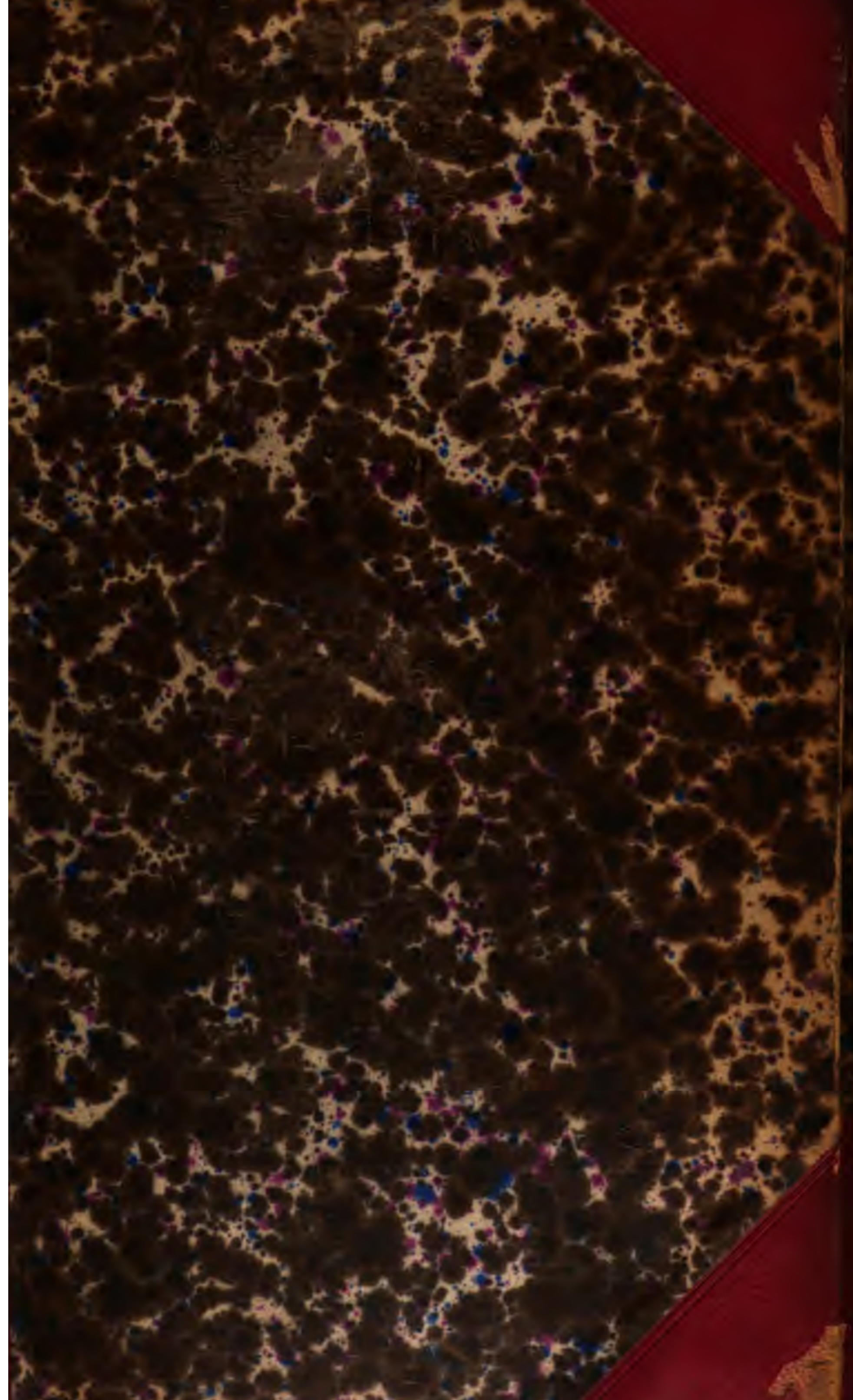



SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG:
CHRISTO ET ECCLESIÆ



ANNALI

DI

SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE

1853

ANNALI
DI SCIENZE
MATEMATICHE E FISICHE

COMPILATI

DA

BARNABA TORTOLINI

Professore di Calcolo Sublime, e Membro del Collegio Filosofico all'Università Romana, Professore di Fisica Matematica nel Collegio Urbano e nel Pontificio Seminario Romano, Socio ordinario della Pontificia Accademia de'Nuovi Lincei, Uno dei Quaranta della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Socio corrispondente dell'Istituto di Bologna, della Reale Accademia delle Scienze, e della Pontaniana di Napoli e di Messina

TOMO QUARTO

ROMA

TIPOGRAFIA DELLE BELLE ARTI

1853

1872, Mar. 22.
Haven Fund.

ANNALI
DI SCIENZE
MATEMATICHE E FISICHE

SUL LUOGO GEOMETRICO DELL' EQUAZIONE ALGEBRICA E DEL SECONDO GRADO

$$r^2 = 2mu + nu^2,$$

RIFERITA A COORDINATE POLARI.

MEMORIA

DI R. RUBINI DI NAPOLI

1. Rappresentino u ed r le coordinate polari d' un punto qualsivoglia preso in un piano, e s'abbia l'equazione

(1) $$r^2 = 2mu + nu^2,$$

ove $2m$ è un parametro rettilineo, ed n un parametro numerico di valore e segno qualunque. Supponendo u esser l'arco che nel cerchio di raggio *uno* misura l'angolo formato dal raggio vettore con una retta di posizione data, e che passa pel polo, l'equazione (1) è geometricamente omogenea, e quando u ed r fossero coordinate rettilinee, essa, come si sa, rappresenta le curve coniche.

Posto ciò, osserviamo in primo luogo che essendo $r=0$, sia qualunque il segno ed il valore di n, e per ogni valore di u acquistando r due valori eguali e di segno contrario, ne segue che tutte le curve contenute nella (1) passano pel polo, e questo punto è *centro* della curva.

2. Sia $n < 0$, e s'avrà più particolarmente:

(2) $$r^2 = 2mu - nu^2.$$

In questo caso si vede che r sarà reale per que'soli valori di u compresi tra $u = 0$, ed $u = \frac{2m}{n}$, e per questi limiti $r = 0$; laonde se la retta xx' (fig. 1) è l'origine delle ascisse angolari, P il polo, ed UU' la retta che fa con Px l'angolo UP$x = \frac{2m}{n}$, la curva dell'equazione (2) sarà contenuta ne'due angoli opposti UPx, U'Px'. Inoltre il secondo membro della (2) diviene un *massimo* per $u = \frac{m}{n}$, ed il corrispondente valore di r è, $r = \frac{m}{\sqrt{n}}$; quindi se si meni pel polo P la AA' bisegante dell' angolo UPx, e si tagli PA = PA' $= \frac{m}{\sqrt{n}}$, saranno A ed A' i punti della curva i più lontani dal polo. La retta AA', come è chiaro, dividendo per metà tutte le corde ad essa perpendicolari è un *asse* della curva, ed A, A' sono perciò due vertici. Pertanto la curva avrà la forma indicata dalla figura, e la chiameremo *ellisse polare* per l'analogia che passa tra la sua equazione, e quella dell'*ellisse conica*.

Dato l'asse AA', e l'angolo UPx, che chiameremo *ampiezza* della curva, questa è interamente determinata; poichè chiamando $2a$ il primo ed α il secondo, avremo, come qui innanzi si è trovato

$$(3) \qquad a = \frac{m}{\sqrt{n}}, \quad \alpha = \frac{2m}{n}$$

donde si trae

$$(4) \qquad m = \frac{2a^2}{\alpha}, \quad n = \frac{4a^2}{\alpha^2},$$

e la (2) si cambia nella seguente:

$$(5) \qquad r^2 = \frac{4a^2}{\alpha^2}(\alpha u - u^2),$$

la quale potendosi scrivere anche così

$$\alpha r = \sqrt{[(2au. \ 2a(\alpha - u)]}$$

ci mostra che se con un raggio PC eguale all'asse della curva, e col centro il polo si descriva un arco Ux che sottenda l'ampiezza; indi con un raggio vettore qualunque PM si descriva un altr'arco BMb, e si prolunghi questo raggio vettore sino ad incontrare l'arco Ux in m, sarà *l'arco* BMb MEDIO PROPORZIONALE *tra i due segmenti* mx, mU *dell'arco* Ux.

In altri termini l'ellisse polare è *il luogo geometrico de'punti, che congiunti con un punto fisso danno i raggi degli archi simili e medii proporzionali tra due segmenti variabili d'un medesimo arco dato e simile ai precedenti.*

Se $2m = n$, $\alpha = 1$, cioè l'ampiezza é misurata dall'arco che uguaglia il raggio e che è di 57° 29578°; quando $m = n$, l'ampiezza α è doppia della precedente, e quando $n < m$ l'ampiezza è maggiore di 2, e la curva ha la forma espressa della (figura 2) con due punti doppii N, N', i quali continueranno ad esistere fino ad $n = \frac{1}{2} m$. Al di sotto di questo limite, e fino ad $n = \frac{1}{4} m$, la curva presenterà quattro punti doppii N, N', N'', N''' (fig. 3); e così appresso.

3. Quando $n > 0$, l'equazione della curva è

(6) $$r^2 = 2mu + nu^2,$$

ed in questo caso i valori di r saran reali da $u = 0$ sino ad $u = \infty$, e da $u = -\frac{2m}{n}$ sino ad $u = -\infty$; si che, supposto essere UU' (fig 4) la retta che fa con Px l'angolo U Px $= \frac{2m}{n}$, la curva si troverà simmetricamente situata intorno alla retta AA' bisegante quest'angolo; il ramo corripondente ai valori positivi di u sarà la doppia spirale hMPM'h', e quello corrispondente ai valori negativi sarà l'altra doppia spirale h'M'''PM''h. La bisegante AA' indefinitamente prolungata sarà un asse della curva, che chiameremo *iperbole polare*.

Ponendo nella (6) $u = -\frac{m}{n}$, si troverà $r = \frac{m}{\sqrt{n}} \sqrt{-1}$,

chiamando a il coefficiente di $\sqrt{-1}$, daremo al doppio di questa quantità il nome di *asse immaginario*; e parimente dinotando con α l'arco che nel cerchio di raggio *uno* misura l'angolo UPx, chiameremo quest'angolo *ampiezza*, ed avremo

$$(7) \qquad a = \frac{m}{\sqrt{n}}, \quad \alpha = \frac{2m}{n},$$

donde

$$(8) \qquad m = \frac{2a^2}{\alpha}, \quad n = \frac{4a^2}{\alpha^2},$$

e l'equazione della curva diverrà:

$$(9) \qquad r^2 = \frac{4a^2}{\alpha^2}(\alpha u + u^2),$$

e quest'equazione non differisce dalla (5) relativa all'ellisse, che pel segno di u^2.

Abbiamo anche qui

$$\alpha r = \sqrt{[2au. \, 2a(\alpha + u)]},$$

e perciò descritto dal polo P, come centro, e con un raggio PC eguale all'asse reale, un arco Ux, che si prolunghi fino ad incontrare il raggio vettore qualunque PM, prolungato se occorre, in m, e descritto parimente col raggio PM l'arco MBb, sarà Bb medio proporzionale tra i due archi Um, mx; vale a dire:

L'iperbole polare è il luogo geometrico di que' punti che congiunti con un punto fisso danno i raggi di altrettanti archi simili e medii proporzionali tra due archi variabili e la cui differenza è un altr'arco dato, e simile ai precedenti.

4. Finalmente se $n = 0$, s'avrà:

$$(10) \qquad r^2 = 2mu,$$

e la curva avrà la forma espressa dalla fig. 5, avente un sol ramo a doppia spirale. Questa curva la chiameremo *parabola polare*, e dalla stessa equazione (10) si scorge che *i quadrati*

de' raggi vettori sono proporzionali agli angoli da essi formati con la tangente che passa pel centro.

5. In tutte le tre specie di curve ora discusse, il centro è un punto d'inflessione.

6. Differenziando l'equazione

$$(11) \qquad r^2 = \frac{4a^2}{\alpha^4}(\alpha u \mp u^2),$$

che rappresenta l'ellisse o l' iperbole polare, secondo che il coefficiente di u^2 è -1 o $+1$, si avrà:

$$(12) \qquad r dr = \frac{2a^2}{\alpha^2}(\alpha + 2u)du, \quad \frac{dr}{du} = \frac{2a^2(\alpha + 2u)}{\alpha^2 r},$$

quindi s'avrà per espressione della sunnormale:

$$(13) \quad S_n = \frac{dr}{du} = \frac{2a^2(\alpha + 2u)}{\alpha^2 r} = \frac{4a^2(\alpha + u)}{\alpha^2 r} - \frac{2a^2}{\alpha r},$$

ovvero riducendo in virtù della (11)

$$(14) \qquad S_n = \frac{r}{u} - \frac{2a^2}{\alpha r}.$$

Ma (fig. 1, 4) descritto col raggio PM$=r$, l'arco MBb si ha

$$Bb = \alpha r, \quad MB = ru,$$

quindi

$$(15) \qquad S_n = \frac{r^2}{MB} - \frac{2a^2}{Bb} = \frac{\overline{MP}^2}{MB} - 2\frac{\overline{PA}^2}{Bb}.$$

Da ciò si conchiude che volendo la sunnormale per un punto M dell'ellisse o dell'iperbole *si troverà una terza proporzionale in ordine all'arco MB e al raggio vettore MP, e similmente un'altra terza proporzionale in ordine all'arco Bb, e al semiasse dell'ellisse, o al semiasse immaginario dell'iperbole, e la differenza tra la prima, e il doppio della seconda darà la sunnormale richiesta.*

Se nella (13) si supponga u negativo, ed $= \frac{\alpha}{2}$ si avrà $S_n = 0$, laonde *ai vertici dell'ellisse la tangente é normale all' asse.*

7. Differenziando parimente l'equazione

$$(16) \qquad r^2 = 2mu$$

relativa alla parabola si ha

$$rdr = mdu\,,$$

e quindi per la sunnormale, e per la suttangente si avrà

$$(17) \qquad S_n = \frac{dr}{du} = \frac{m}{r} = \frac{1}{2}\,\frac{r}{u}\,,$$

$$(18) \qquad S_t = \frac{r^2 du}{dr} = r^2\,\frac{r}{m} = 2ru\,.$$

La prima formola si riduce come sopra a (fig. 5)

$$(19) \qquad S_n = \frac{1}{2}\,\frac{r^2}{MB} = \frac{PM^2}{2MB}\,,$$

e però la sunnormale è *terza proporzionale in ordine al doppio dell'arco* MB, *e del raggio vettore* PM.

La suttangente poi *è doppia dell'arco* MB.

QUADRATURA DELLE CURVE PRECEDENTI.

8. La formola che rappresenta il differenziale dell' area t, rispetto a coordinate polari é, come si sa,

$$(20) \qquad dt = \frac{1}{2}\,r^2 du\,,$$

e sostituendo per r^2 il suo valore (11), e integrando avremo

$$t = \frac{2a^2}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha u^2}{2} + \frac{u^3}{3}\right) = \frac{1}{6}\,\frac{4a^2}{\alpha^2}(\alpha u + u^2)u + \frac{1}{3}\,\frac{u}{\alpha}\,a^2.u\,,$$

ovvero, riducendo in virtù della stessa (11)

(21) $$t = \frac{1}{6} r^2 u + \frac{a^2}{3} \frac{u^2}{\alpha}$$

nè s'aggiunge costante, perchè quando $u = 0$, $r = 0$, $t = 0$.

Sia M (fig. 1, 4) un punto della curva; coi raggi PM, PA si descrivano gli archi MB, Aa, e si prenda an terza proporzionale ad aa', am', e sarà il settore curvilineo PNM eguale al terzo del settore circolare PMB più dei terzi dell'altro settore circolare Pna.

9. Nel caso dell' ellisse, estendendo l'integrale (21) sino ad $u = \frac{1}{2}\alpha$, avremo pel quadrante ellittico

(22) $$t_q = \frac{2}{3} \text{ sett. AP}a .$$

Pertanto *la superficie intera dell'ellisse polare è eguale ad otto terzi del settore che ha per raggio il semiasse, e sottende un angolo eguale all'ampiezza dell'ellisse medesima.*

10. Sostituendo nella formola (20) in luogo di r^2 il valo-(16) relativo alla parabola, e integrando si avrà

(23) $$t = \frac{mu^2}{2} = \frac{1}{4} r^2 u .$$

Quindi il *settore parabolico è la metà del settore circolare* PBM (fig. 5).

RETTIFICAZIONE DELLE CURVE PRECEDENTI.

11. Dinoti s l'arco della curva a partire dal polo sino ad un punto qualunque M, in guisa che per $u = 0$ sia pure $s = 0$, e sarà

(24) $$s = \int_0 du \sqrt{\left(r^2 + \frac{dr^2}{du^2}\right)} .$$

Nel caso dell'ellisse si ha

$$(25)\qquad r^2 = \frac{4a^2}{\alpha^2}(\alpha u - u^2)\,,\quad \frac{dr}{du} = \frac{2a^2(\alpha - 2u)}{\alpha^2 r} = \frac{a(\alpha - 2u)}{\alpha\sqrt{(\alpha u - u^2)}}$$

e sostituendo in (22) verrà:

$$(26)\qquad s = \frac{2a}{\alpha}\int_0 \frac{\sqrt{\left[(\alpha u - u^2)^2 + \left(\frac{\alpha}{2} - u\right)^2\right]}}{\sqrt{(\alpha u - u^2)}}du,$$

e quest'integrale, che in generale dipende dalle trascendenti ellittiche, prende una forma più semplice, ponendo

$$(27)\qquad u = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{z}\,,$$

con che si ha:

$$(28)\qquad s = -\frac{a}{\alpha}\int_{\frac{\alpha^2}{4}} \frac{\sqrt{\left[\frac{\alpha^4}{16} - \left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right)z + z^2\right]}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{4}z - z^2\right)}}dz\,.$$

12. Prima di trattare il caso generale, esaminiamo due casi speciali.

1.° Se $\alpha = 1$, allora quest'ultima formola diviene:

$$(29)\qquad s = -a\int_{\frac{1}{4}} \frac{\left(\frac{1}{4} + z\right)dz}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}z - z^2\right)}}\,,$$

e l'integrazione si fa per archi di cerchio. Abbiamo in effetto

$$\int\frac{\left(\frac{1}{4} + z\right)dz}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}z - z^2\right)}} = -\int\frac{\left(\frac{1}{8} - z\right)dz}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}z - z^2\right)}} + \frac{3}{8}\int\frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}z - z^2\right)}}$$

$$= -\sqrt{\left(\frac{1}{4}z - z^2\right)} + \frac{3}{8}\,\text{arc sen}(8z - 1) + C\,,$$

e quindi determinando la costante col prendere l' integrale da $z=\frac{1}{4}$, avremo:

$$\int\frac{\left(\frac{1}{4}+z\right)dz}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}z-z^2\right)}}=-\sqrt{\left(\frac{1}{4}z-z^2\right)}-\frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{2}-\text{arc sen}(8z-1)\right)$$

$$=-\sqrt{\left(\frac{1}{4}z-z^2\right)}-\frac{3}{8}\text{ arc cos}(8z-1)$$

e sostituendo in (29) si avrà finalmente

(30) $$s=q\sqrt{\left(\frac{1}{4}z-z^2\right)}+\frac{3}{8}q\text{ arc cos}(8z-1).$$

Rimettendo per z il suo valore (27) nell'ipotesi di $\alpha=1$, e riducendo in virtù dell'equazione (25) della curva nella stessa ipotesi di $\alpha=1$, si otterrà:

(31) $$s=\frac{1}{2}r\left(\frac{1}{2}-u\right)+\frac{3}{8}q\text{ arc cos }\frac{q^2-2r^2}{a^2},$$

e se M (fig. 1) è un punto della curva, nel caso che stiamo esaminando, quando cioè l'ampiezza dell'ellisse è un angolo che sottende un arco eguale al raggio, la parte algebrica dell'espressione precedente dinota appunto la metà dell'arco MD.

Se vuolsi l'espressione del quadrante ellittico converrà estendere l'integrale (30) sino a $z=0$, che è il valore corrispondente all' altro limite $u=\frac{1}{2}$, in virtù della relazione $u=\frac{1}{2}-\sqrt{z}$, il quale limite corrisponde appunto all' estremo del quadrante nel caso attuale. In tal modo si ha

(32) $$s_q=\frac{3}{8}\pi a=\frac{3}{4}\,\frac{\pi}{2}a.$$

Questo risultamento ci mostra che l'intero perimetro ellittico è, nel caso che contempliamo i *tre quarti della circonferenza che ha per raggio il semiasse della curva.*

13. Si noti che la formola (30) e la (31) valgono per gli archi minori del quadrante; poichè estendendo quegl' integrali al di là di $z=0$, si passerebbe per l' infinito, tale diventando il coefficiente di dz nella formola (29). D' altronde l'integrale ha effettivamente un valor finito pe' limiti $z=\frac{1}{4}$, $z=0$; poichè chiamando $f(z)$ quel coefficiente ed a uno de' precedenti valori di z, trovasi verificata la condizione $(z-a)f(z)=0$, per $z=a$.

14. Caso 2.° Quando $\alpha=2$, le formole (25) e (26) divengono:

$$(33)\qquad u=1-\sqrt{z},$$

$$(34)\qquad s=-\frac{a}{2}\int_{1}\frac{\sqrt{(1-z+z^2)}}{\sqrt{(z-z^2)}}\,dz,$$

e fatto

$$(35)\qquad z=\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)$$

si avrà:

$$(36)\qquad s=\frac{a}{2}\int_{0}d\varphi\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\varphi\right)}=\frac{a}{2}\operatorname{E}\left(\frac{1}{2},\varphi\right),$$

il quale risultamento ci mostra *che gli archi dell' ellisse polare in questo caso godono della medesima proprietà di quelli dell' ellisse conica*, potendosi i primi addizionare, sottrarre, moltiplicare o dividere, come i secondi.

Estendendo l' integrale al quadrante ellittico, ed osservando che per $u=1$, che è il limite corrispondente all' estremo del quadrante, si ha per le (33) e (35) $\varphi=\pi$, avremo:

$$(37)\qquad s_q=\frac{a}{2}\int_{0}^{\pi}d\varphi\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\varphi\right)}=a\operatorname{E}_1\left(\frac{1}{2}\right);$$

vale a dire che *il quadrante dell'ellisse polare, d'ampiezza eguale ad un angolo che sottende un arco doppio del raggio, sta al quadrante d'una ellisse conica di eccentricità* $\frac{1}{2}$ *ed asse maggiore* 1, *come il semiasse dell'ellisse polare sta ad* 1, *ossia al semiasse dell'ellisse conica.*

15. La formola (36) ci mostra ancora che *se con la medesima ampiezza di* 114°, 36'. . . *e con assi di varia grandezza si descrivano altrettante ellissi polari, gli archi di queste curve che sottendono un medesimo angolo al polo stanno tra loro nel medesimo rapporto degli assi.* Ciò era facile vedersi anche *a priori*; poichè in questo caso l'equazione dell'ellisse ammette un sol parametro, e quindi tutte le curve di questa specie sono simili.

16. Riprendiamo ora l'integrale generale

$$(28)\quad s = -\frac{a}{\alpha}\int_{\frac{\alpha^2}{4}} \frac{\sqrt{\left[\frac{\alpha^4}{16} - \left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right)z + z^2\right]}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{4}z - z^2\right)}}dz\ ,$$

e poniamo

$$(38)\qquad z = x + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right);$$

il nuovo limite corrispondente a $z = \frac{\alpha^2}{4}$ sarà $x = 1$, e si troverà:

$$(39)\qquad s = -\frac{a}{\alpha}\int_1 \frac{(a' + x^2)dx}{\sqrt{[(a' + x^2)(a'' - b''x - x^2)]}}\ ,$$

ove

$$(40)\quad a' = \frac{1}{4}(\alpha^2 - 1),\ a'' = \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right),\ b'' = \frac{1}{4}(\alpha^2 - 4),$$

Se ora, seguendo il Legendre, si faccia

(41) $$x = \frac{h + ky}{1 + y},$$

si avrà:

(42) $$s = \frac{a(h-k)}{\alpha}\int_{y_1} \frac{(\gamma + \delta y^2)dy}{(1+y)^2 R},$$

essendo

(43) $$y_1 = \frac{1-h}{k-1}$$

(44) $$\begin{cases} \gamma = a' + h^2, & \delta = a' + k^2, \\ \gamma' = a'' - b''h + h^2, & \delta' = a'' - b''k + k^2, \end{cases}$$

(45) $$R = \sqrt{[(\gamma + \delta y^2)(\gamma' + \delta' y^2)]},$$

e le h e k vengono determinate mercè le due equazioni

(46) $$hk + a' = 0, \quad b''(h + k) - 2(a' + a'') = 0,$$

in virtù delle quali, le (4) possono prendere ancora l'aspetto seguente:

(47) $$\begin{cases} \gamma = h(h-k), & \delta = k(k-h), \\ \gamma' = \left(h + \frac{b''}{2}\right)(k-h), & \delta' = \left(k + \frac{b''}{2}\right)(h-k). \end{cases}$$

Posto ciò, si ha da una parte

(48) $$\int \frac{(\gamma + \delta y^2)dy}{(1+y)^2 R} = \delta\int\frac{dy}{R} - 2\delta\int\frac{dy}{(1+y)R} + (\gamma+\delta)\int\frac{dy}{(1+y)^2 R},$$

e da un'altra parte

$$d\,\frac{R}{1+y} = \left[\delta\delta'(y^2 - 1) + \frac{\gamma\delta' + \delta\gamma' + 2\delta\delta'}{1+y} - \frac{(\gamma+\delta)(\gamma'+\delta')}{(1+y)^2}\right]\frac{dy}{R},$$

quindi integrando quest'ultima formola, dividendo per $\gamma' + \delta'$, addizionando il risultamento con la (48), e sostituendo alle γ, δ, γ', δ', i valori (47) si troverà, dopo fatta la sostituzione

del risultamento nella (42):

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} s = \frac{a(h-k)}{\alpha}\Big[\frac{R}{(h-k)^2(1+y)} - k\Big(h + \frac{b''}{2}\Big)\int_{y_1}\frac{dy}{R} \\ + k\Big(k + \frac{b''}{2}\Big)\int_{y_1}\frac{y^2dy}{R} - \frac{b''}{2}(h-k)\int_{y_1}\frac{dy}{(1+y)R}\Big]\end{aligned}\right. .$$

17. Da questa espressione si vede già che l'arco s dipende, in generale, da tutte e tre le specie di funzioni ellittiche, e noi senza più andare oltre nella riduzione de' tre integrali che entrano nella formola precedente, sarem contenti di porre in disamina soltanto i segni di che debbono essere affette le γ, δ, γ', δ' nell'espressione di

$$(45)\qquad R = \sqrt{[(\gamma + \delta v^2)(\gamma' + \delta' v^2)]}.$$

E primamente secondo le relazioni (46) e (40) si ha:

$$(50)\qquad hk = -\frac{1}{4}(\alpha^2 - 1)\,; \quad h + k = \frac{3\alpha^2 - 4}{\alpha^2 - 4}\,;$$

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} h &= \frac{3\alpha^2 - 4 + \alpha^3}{2(\alpha^2 - 4)} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2(\alpha - 2)}\,, \\ k &= \frac{3\alpha^2 - 4 - \alpha^3}{2(\alpha^2 - 4)} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{2(\alpha + 2)}\,; \end{aligned}\right.$$

$$(52)\qquad h + \frac{b''}{2} = \frac{\alpha^2}{8}\,\frac{\alpha+2}{\alpha-2}\,, \quad k + \frac{b''}{2} = \frac{\alpha^2}{8}\,\frac{\alpha-2}{\alpha+2}\,;$$

e da queste ultime formole si scorge che $h + \frac{b''}{2}$ e $k + \frac{b''}{2}$ sono sempre dello stesso segno, e perciò

$$(53)\qquad \gamma' = \Big(h + \frac{b''}{2}\Big)(k - h),\ \delta' = \Big(k + \frac{b''}{2}\Big)(h - k)$$

sono di segno contrario, finchè h e k sono disuguali. All'opposto

$$(60)\qquad s = a\int_{\frac{1}{4}} \frac{\left(z + \frac{1}{4}\right)dz}{\sqrt{\left(z^2 - \frac{1}{4}z\right)}};$$

ma

$$\int \frac{\left(z + \frac{1}{4}\right)dz}{\sqrt{\left(z^2 - \frac{1}{4}z\right)}} = \int \frac{\left(z - \frac{1}{8}\right)dz}{\sqrt{\left(z^2 - \frac{1}{4}z\right)}}$$

$$+ \frac{3}{8}\int \frac{dz}{\sqrt{\left(z^2 - \frac{1}{4}z\right)}} = \sqrt{\left(z^2 - \frac{1}{4}z\right)}$$

$$+ \frac{3}{8}\, l\left[z + \sqrt{\left(z^2 - \frac{1}{4}z\right)} - \frac{1}{8}\right] + C,$$

laonde determinando la costante C, col prendere quest'integrale a partire da $z = \frac{1}{4}$, si troverà finalmente:

$$s = a\sqrt{\left(z^2 - \frac{1}{4}z\right)} + \frac{3}{8}\, al\left[8z + 8\sqrt{\left(z^2 - \frac{1}{4}z\right)} - 1\right]$$

ovvero rimettendo per z il suo valore $\left(u + \frac{1}{2}\right)^2$, e riducendo in virtù dell'equazione della curva, che in questo caso è $r^2 = 4a^2(u + u^2)$, si avrà:

$$(61)\qquad s = \frac{1}{2}\, r\left(u + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{8}\, al\left[\frac{4r}{a}\left(u + \frac{1}{2}\right) + \frac{2r^2}{a^2} + 1\right]$$

e qui pure, come per l'ellisse, la parte algebrica rappresenta la metà dell'arco MD.

2.° Quando $\alpha = 2$, le formole (58) e (59) divengono:

$$(62)\qquad u = \sqrt{z} - 1, \quad s = \frac{a}{2}\int_1 \frac{\sqrt{(z^2 - z + 1)}}{\sqrt{(z^2 - z)}}dz,$$

e quest'ultima col porre

(63) $$z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\varphi} + 1\right),$$

ed osservando che al limite $z = 1$, corrisponde $\varphi = 0$ si cangerà nell'altra:

(64) $$s = \frac{a}{2}\int_0 \frac{\Delta\, d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

ove

(65) $$\Delta = \sqrt{\left(1 - \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}^2\varphi\right)}.$$

Posto ciò si ha

$$d.\Delta \tan\varphi = \frac{\Delta d\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{3}{4}\,\frac{\mathrm{sen}^2\varphi}{\Delta}\,d\varphi = \frac{\Delta d\varphi}{\cos^2\varphi} + \Delta\, d\varphi - \frac{d\varphi}{\Delta},$$

e integrando e sostituendo in (63) si avrà:

(66) $$s = \frac{a}{2}\,(\Delta \tan\varphi - E - F).$$

E poichè dinotando con Υ l'arco d'iperbole conica, si ha

$$\Upsilon = \Delta \tan\varphi - E + b^2 F \text{ (*)},$$

e qui $b^2 = \frac{1}{4}$, avremo ancora:

(67) $$s = \left(\Upsilon + \frac{3}{4}F\right).$$

19. Sieno φ_1, φ_2, φ_3 tre valori particolari di φ, ed s_1, s_2, s_3 quelli corrispondenti di s nella (66), ed avremo:

(*) Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*, pag. 16, t. I.

(60) $$s = a\int_{\frac{1}{4}} \frac{\left(z + \frac{1}{4}\right)dz}{\sqrt{\left(z^2 - \frac{1}{4}z\right)}};$$

ma

$$\int \frac{\left(z + \frac{1}{4}\right)dz}{\sqrt{\left(z^2 - \frac{1}{4}z\right)}} = \int \frac{\left(z - \frac{1}{8}\right)dz}{\sqrt{\left(z^2 - \frac{1}{4}z\right)}}$$

$$+ \frac{3}{8}\int \frac{dz}{\sqrt{\left(z^2 - \frac{1}{4}z\right)}} = \sqrt{\left(z^2 - \frac{1}{4}z\right)}$$

$$+ \frac{3}{8}\, l\left[z + \sqrt{\left(z^2 - \frac{1}{4}z\right)} - \frac{1}{8}\right] + C,$$

laonde determinando la costante C, col prendere quest'integrale a partire da $z = \frac{1}{4}$, si troverà finalmente:

$$s = a\sqrt{\left(z^2 - \frac{1}{4}z\right)} + \frac{3}{8}\, al\left[8z + 8\sqrt{\left(z^2 - \frac{1}{4}z\right)} - 1\right]$$

ovvero rimettendo per z il suo valore $\left(u + \frac{1}{2}\right)^2$, e riducendo in virtù dell'equazione della curva, che in questo caso è $r^2 = 4a^2(u + u^2)$, si avrà:

(61) $$s = \frac{1}{2}\, r\left(u + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{8}\, al\left[\frac{4r}{a}\left(u + \frac{1}{2}\right) + \frac{2r^2}{a^2} + 1\right]$$

e qui pure, come per l'ellisse, la parte algebrica rappresenta la metà dell'arco MD.

2.° Quando $\alpha = 2$, le formole (58) e (59) divengono:

(62) $$u = \sqrt{z - 1}, \quad s = \frac{a}{2}\int_1 \frac{\sqrt{(z^2 - z + 1)}}{\sqrt{(z^2 - z)}}dz,$$

e quest'ultima col porre

(63) $$z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\varphi} + 1\right),$$

ed osservando che al limite $z = 1$, corrisponde $\varphi = 0$ si cangerà nell'altra:

(64) $$s = \frac{a}{2}\int_0 \frac{\Delta\, d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

ove

(65) $$\Delta = \sqrt{\left(1 - \frac{3}{4}\,\text{sen}^2\varphi\right)}.$$

Posto ciò si ha

$$d.\Delta \tan\varphi = \frac{\Delta d\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{3}{4}\,\frac{\text{sen}^2\varphi}{\Delta}\,d\varphi = \frac{\Delta d\varphi}{\cos^2\varphi} + \Delta\, d\varphi - \frac{d\varphi}{\Delta},$$

e integrando e sostituendo in (63) si avrà:

(66) $$s = \frac{a}{2}\,(\Delta \tan\varphi - \text{E} - \text{F}).$$

E poichè dinotando con Υ l'arco d'iperbole conica, si ha

$$\Upsilon = \Delta \tan\varphi - \text{E} + b^2\text{F} \;(^*),$$

e qui $b^2 = \frac{1}{4}$, avremo ancora:

(67) $$s = \left(\Upsilon + \frac{3}{4}\,\text{F}\right).$$

19. Sieno φ_1, φ_2, φ_3 tre valori particolari di φ, ed s_1, s_2, s_3 quelli corrispondenti di s nella (66), ed avremo:

(*) Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*, pag. 16, t. I.

$$s_1 = \frac{a}{2}\Big(\Delta \tan\varphi_1 - E(\varphi_1) + F(\varphi_1)\Big) ,$$

$$s_2 = \frac{a}{2}\Big(\Delta \tan\varphi_2 - E(\varphi_2) + F(\varphi_2)\Big) ,$$

$$s_3 = \frac{a}{2}\Big(\Delta \tan\varphi_3 - E(\varphi_3) + F(\varphi_3)\Big) .$$

Ora che fra i tre angoli φ_1 , φ_2 , φ_3 vi sia la relazione

$$(68) \qquad F(\varphi_1) + F(\varphi_2) - F(\varphi_3) = 0,$$

e perciò

$$E(\varphi_1) + E(\varphi_2) - E(\varphi_3) = c^2 \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 \operatorname{sen}\varphi_3$$

ove $c^2 = \frac{3}{4}$, si avrà:

$$(69)\left\{\begin{array}{l} s_1 + s_2 - s_3 \\ = \frac{a}{2}\Big(\Delta\tan\varphi_1 + \Delta\tan\varphi_2 - \Delta\tan\varphi_3 - c^2 \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 \operatorname{sen}\varphi_3\Big) \end{array}\right. .$$

Posto ciò, presi sulla curva i due archi s_1 , s_2 che poniamo corrispondano agli angoli u_1 , u_2 , e calcolati i corrispondenti valori di φ_1 , φ_2 mercè la relazione

$$(70) \qquad \cos\varphi = \frac{1}{1 + 2(u^2 + 2u)} ,$$

che ottiensi eliminando z tra la prima (62) e la (63); indi determinando il terzo angolo φ_3 in modo da soddisfare all' equazione trascendente (69), combinata con l'algebrica

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 \Delta(\varphi_3) = \cos\varphi_3 \quad (*) ,$$

quest' angolo φ_3 darà un valore u_3 che determina un arco

(*) Legendre, *Traité des fonctions elliptiques*; pag. 45, t. I,

s_3 eguale alla somma de'due s_1, s_2 più o meno una quantità algebrica.

In generale la relazione (69) è quella che serve per la comparazione degli archi d'iperbole polare, nel caso che l'ampiezza fosse di 114°, 59156'.

20. Il caso generale, quello cioè d'un' ampiezza qualunque α conduce ad un espressione di s analoga alla (49).

21. Consideriamo finalmente gli archi della parabola polare. L'equazione di questa curva essendo

$$(70) \qquad r^2 = 2mu$$

ci dà

$$(71) \qquad s = \sqrt{m} \int_0 \frac{\sqrt{(4u^2+1)}}{\sqrt{2u}}\, du\,,$$

e fatto $2u = x^2$, con che il limite dell'integrale resta lo stesso, si avrà:

$$(72) \qquad s = \sqrt{m}\left(\int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^4)}} + \int_0 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1+x^4)}}\right);$$

ma

$$d.x\sqrt{(1+x^4)} = \frac{dx}{\sqrt{(1+x^4)}} + 3\,\frac{x^4 dx}{\sqrt{(1+x^4)}}\,,$$

e quindi

$$\int \frac{x^4\, dx}{\sqrt{(1+x^4)}} = \frac{1}{3}\, x\sqrt{(1+x^4)} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^4)}}\,;$$

laonde sostituendo in (72) si avrà:

$$(73) \qquad s = \frac{1}{3}\, x.\sqrt{m}\sqrt{(1+x^4)} + \frac{2}{3}\sqrt{m}\int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^4)}}\,.$$

Or se si faccia

$$x = \frac{1+k\tan\varphi}{1-k\tan\varphi}\,, \quad \text{essendo} \quad k = \sqrt{\left(3-\sqrt{8}\right)}\,,$$

si troverà:

$$(74)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^4)}} = \frac{1}{k'}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\mathrm{sen}^2\varphi)}} + C,$$

essendo

$$k' = \sqrt{\left(3+\sqrt{8}\right)}, \quad c^2 = \frac{2\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}}.$$

Così l'espressione (73) dell'arco parabolico si trova dipendere dagl'integrale di prima specie (74).

Non è inutile osservare che se nella parte algebrica dell' espressione (73) si rimetta per x il suo valore $\sqrt{2u}$, si troverà:

$$\frac{1}{3}x\sqrt{m}\sqrt{(1+x^4)} = \frac{1}{3}\sqrt{(2mu)}\sqrt{(1+4u^2)} = \frac{1}{3}r\sqrt{(1+4u^2)}.$$

Ma abbiamo per espressione della suttangente in un punto (u, r) della curva

$$S_t = 2ru,$$

e quindi per la tangente

$$T = r\sqrt{(1+4u^2)},$$

laonde sarà

$$\frac{1}{3}x\sqrt{m}\sqrt{(1+x^4)} = \frac{1}{3}T,$$

cioè il terzo della tangente.

NUOVE RICERCHE SULLA DISTRIBUZIONE DEL CALORE ALLA SUPERFICIE SOLARE.

MEMORIA

DEL P. A. SECCHI
Professore al Collegio Romano.

L'interesse che tutti i dotti hanno mostrato per le ricerche da me intraprese nello scorso marzo sulla distribuzione del calore alla superficie solare (*) mi ha imposto un dovere di continuarle con quella assiduità che per me si poteva maggiore; e ciò era tanto più necessario, quanto che alcune delle ipotesi emesse per ispiegare le irregolarità trovate, dovevano esser confermate o distrutte da future esperienze. Di più, nell'intervallo scorso dalla prima pubblicazione in poi ho avuto il piacere di vedermi proposte nuove indagini, ed altresì le obiezioni mosse da persone di gran merito contro il metodo usato nello sperimentare, mi hanno condotto a perfezionarlo e renderlo sempre più di comune soddisfazione. Prima però di esporre ciò che si è fatto, credo necessario di accennare quì alcune delle ragioni che mi hanno determinato a non procedere in alcune cose a quel modo che ad altri pareva preferibile.

Molti avrebbero desiderato che si fosse fatta una serie di osservazioni sui varii meridiani solari, per riconoscere se vi è notabile disuguaglianza nelle varie parti del sole in ascensione retta, come parrebbe risultare dalle ricerche del sig. Buys-Ballot e del sig. Nervander. Io avrei ben volentieri fatto questo se non mi si fosse parata innanzi una difficoltà che finora non ho saputo convenientemente superare. Questa è che l'equatore ci si presenta ordinariamente proiettato sul disco solare in una ellissi, il cui asse maggiore è molto obli-

(*) Vedi questi *Annali* Maggio 1852, pag. 197.

quo al moto diurno, onde se concepiscasi un meridiano solare che passi pel centro del disco, e prendansi sull'equatore solare due punti ad eguale distanza da questo meridiano medesimo, si vedrà che essi sono diversamente disposti rapporto al moto diurno della sfera celeste, e che per fare il confronto delle loro temperature bisognerebbe combinare le osservazioni in ascensione retta e in declinazione nel medesimo tempo. Ora quelle in A. R. mi hanno sempre ispirato poca fiducia non essendo il nostro strumento mosso da orologio, e sapendo per pratica quanto sia difficile il tener fisso un punto determinato sulla pila, a meno che esso non sia visibilmente distinto da macchie, ovvero dalla vicinanza degli orli. Questa difficoltà però speriamo che sarà tolta di mezzo ben presto, quando sarà in posto il grande equatoriale di 14 piedi mosso dall'orologio che sta ora lavorandosi a Monaco dal sig. Merz pel nostro osservatorio, ovvero nel modo che indicheremo più sotto.

Per soddisfare pertanto alla ragionevole inchiesta, e per arrivare al medesimo scopo per altra via, mi era proposto di studiare per molti giorni consecutivi la distribuzione del calore sui meridiani che successivamente passano pel centro del disco, e perciò avea già condotto molto innanzi una serie di osservazioni nella stagione estiva in cui il buon tempo è più costante, ma per gli eccessivi calori del clima romano che rendevano tali ricerche non poco incomode ed anche pericolose, fu mestieri interromperle. Nè dopo quell'epoca mi è stato possibile farle seguitamente quanto si sarebbe dovuto per un tal fine. Anche nelle più belle giornate avviene spesso che alle ore in cui il sole è più alto, l'atmosfera s'ingombra di vapori, talchè i giorni veramente opportuni e senza eccezione non sono molto numerosi, dovendosi escludere non solo quelli che sono visibilmente men puri, ma anche una gran parte di que'che sono in apparenza assai belli, in cui però si prepara qualche cambiamento; allora infatti le esperienze mostrano tali irregolarità che da esse ci è stato

più volte possibile predire qualche ora prima la mutazione di tempo avvenuta appresso; onde non recherà meraviglia se non si sono potute accumulare le esperienze quanto si sarebbe voluto, e dovuto. In quanto al metodo di sperimentare tenuto in queste posteriori ricerche, esso è stato in somma lo stesso che nelle precedenti; ma con tutti i vantaggi che si sono potuti trarre da uno strumento di molto maggior forza. Il telescopio usato nelle prime essendo a taluni sembrato di poca forza, sino dal mese di agosto vi fu sostituito il telescopio di Cauchoix : il che potè farsi con grande agevolezza, essendo il montante in ferro fuso del primo strumento più che sufficente a poter reggere al nuovo peso. Esso è stato già descritto nelle memorie dell'osservatorio del Collegio Romano pel 1851.

La lunghezza focale del cannocchiale è $2^m.43$, e la sua apertura libera $0^m.162$: questa si è sempre adoperata senza diaframma alcuno, e l'oculare di cui ci siamo serviti è uno di Ramsden che ingrandisce direttamente circa 64 volte. Con questo sistema di lenti si ottiene una imagine solare distintissima del diametro di $0^m.218$ alla distanza di $0^m.40$ circa dall'oculare, e atteso tale grandezza si può impiegare tutta l'apertura della pila che avendo una sezione di 15 millim. in quadro, occupa soltanto $^1/_{166}$ della superficie totale della detta immagine. La deviazione dell'ago nell'estate pei punti centrali arriva fino a 33° e le altre deviazioni sono proporzionatamente assai forti, e perciò meno soggette ad errori. Perciò in queste esperienze siamo sempre partiti dallo 0° della graduazione e non da 10° come nelle precedenti, il che facevamo per evitare la piccola inerzia dell'ago nei primi gradi, e non perchè l'ago stesso non potesse mettersi a 0° pel magnetismo dei fili : questi sono anzi di assai buona qualità, nè mai ho trovato tale difetto nei molti anni che maneggio questo strumento (*).

(*) Avverto questo, perchè un celebre fisico ha sospettato esser questa la causa del non partire noi dallo zero.

La pila termoelettrica si applica all' oculare mediante un pezzo addizionale, colla facilità stessa degli oculari ordinarii. Un tubo di ottone del diametro di 8 centim. e lungo 30 invitasi esteriormente al tubo che porta l'oculare : a questo tubo è fissata una riga lunga mezzo metro che porta la pila, e due diaframmi, uno anteriore che serve anche di sostegno per collocarvi le diverse sostanze trasparenti, l'altro posteriore coperto di drappo nero che serve ad evitare le riflessioni e le radiazioni degli oggetti circostanti. Al qual fine ancora, oltre i diaframmi usati per riparare lo strumento dal raggiamento delle altre parti del cielo, si è avuto avvertenza di stendere panni neri sul pavimento della stanza. Finalmente per evitare l' incomodo di leggere ogni volta l' alidada dello strumeto, si è collocata l'apertura della pila nel mezzo di un diaframma bianco, sul quale si sono tracciati varii segni a quali conducendo il lembo solare, si esplorano le varie parti del disco che cader devono sul centro della pila. Così tracciando sul diaframma la proiezione dell' equatore solare e del suo meridiano che passa pel centro del disco, si potranno fare le ricerche di cui abbiamo parlato di sopra, per esaminare se il sole nella sua rotazione ci presenta punti ora più ed ora meno caldi, il che finora non abbiamo potuto fare non essendocisi presentato questo semplicissimo spediente.

Nelle ricerche attuali si è fatto uso, come ho detto, dell'apertura libera della pila onde evitare le variazioni accidentali di temperatura proprie di qualche piccola estensione di superficie solare, ma se si volesse indagare la legge della distribuzione, sarebbe mestieri restringerla di più. Esplorando il diametro verticale, o per parlare più esattamente il diametro secondo il circolo di declinazione, si fecero da principio diverse serie percorrendo molti de'suoi punti; ma un tal metodo ritrovossi presto difettoso, perchè il tempo richiesto ad una serie completa era molto lungo, e durante questa il sole

cambiava di altezza, e spesso lo stato dell'atmosfera subiva delle alterazioni notabili. Perciò a ridurre il tempo di ciascuna serie al minimo possibile, si collocava la pila comunemente in cinque punti soli, cioè nel centro, a 10′ sopra e a 10′ sotto di esso. Presso i lembi poi si collocava in modo che il circolo del disco fosse precisamente tangente ai vertici del quadrato del tubo che la racchiude. Siccome la pila occupa circa 2′ $^1/_4$ del diametro lineare del sole, si vede che essendo i punti raggianti distanti dal centro di + 14′, + 10′, 0, — 10′, — 14′ incirca, le porzioni del diametro non esplorate direttamente non erano alquanto grandi fuorchè presso il centro stesso, ma quivi ordinariamente la temperatura non scema gran fatto per un intervallo di 5 o 6′. Del resto i punti esplorati nella stessa serie erano sempre i medesimi, conducendosi gli orli del sole ai soli punti marcati sul diaframma bianco nel cui mezzo era la pila. Per risparmiar tempo la posizione di equilibrio dell'ago senza la radiazione osservavasi solo al principio e al fine di ciascuna serie, nè si aspettava che esso rivenisse a zero per ogni punto particolare; ma quando era ben fermo si cambiava posto alla pila nell'imagine, avvertendo di passare per una serie di punti, il cui calore sul disco fosse eguale a un dipresso agli esplorati. Senza tale cautela l'ago concepisce delle oscillazioni che esigono non poco tempo ad estinguersi, e le esperienze si allungano inutilmente. Nelle giornate ventose la bocca della pila si ricopre con sottilissima foglia di mica che resta almeno 30^{mm} distante dalle coppie annerite, ma ciò è stato necessario solo una volta o due. Vedremo appresso come siasi fatto per esplorare altri punti della superficie solare, non collocati sul diametro verticale.

Vengo ora ai risultati ottenuti. Le osservazioni sono state condotte in modo da cimentare successivamente le varie ipotesi che si potevano fare per ispiegare le differenze di temperatura osservate nelle varie parti del disco: Queste sono

1ª Ineguaglianza dei due emisferi australe e boreale.

2ª Eccesso di calore sulla zona equatoriale.

3ª Diversità di temperatura nelle varie parti che ci presenta il sole, ossia in ascensione retta eliocentrica.

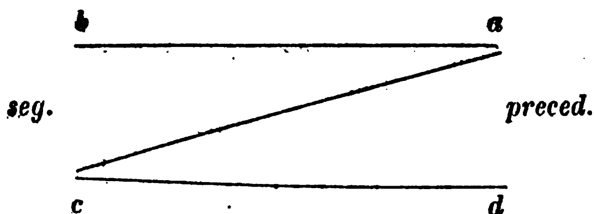
4ª Azione dell'atmosfera terrestre.

5ª Termocrosi dell'atmosfera solare.

Le osservazioni fatte nel mese di marzo davano il massimo di calore in un punto del disco solare superiore al centro, e tal differenza poteva aver luogo tanto nel caso che l'equatore fosse più caldo, quanto che il solo emisfero boreale lo fosse più dell'australe; ed anche la disuguaglianza poteva nascere da queste due cause insieme congiunte. Che in un corpo così sterminato quale è il sole possano avere luogo tali diversità, non farà credo maraviglia a nessuno, e il sig. Arago cita a questo proposito la spiegazione che si dà della variabilità di alcune stelle, creduta dipendente dalla loro rotazione. Laonde le ipotesi dianzi emesse non si escludono scambievolmente, ma resta a separarle nei loro effetti. In caso dei due emisferi disuguali in temperatura, la diversità doveva sussistere anche dopo la metà di giugno allorchè la projezione dell'equatore solare passava pel centro, ma in quello della loro eguaglianza, la curva delle temperature doveva essere simmetrica. Ora le osservazioni fin dal finire di maggio avevano dato tal curva molto accostantesi alla simmetria, ma un eccesso di calore nella parte superiore del disco continuò ad esser sensibile anche nel mese di giugno. Questo risultato fu costante fin presso l'agosto in cui la differenza cominciò a svanire, e il maggior calore a trovarsi ora sopra ora sotto del centro. In quest'epoca si ebbe l'avvertenza di sperimentare con ambedue gli strumenti maggiore e minore per vedere se punto vi contribuisse la loro qualità, ma i risultati furono identici per ambedue. Le esperienze abbracciano un intervallo di tempo superiore a quello della rotazione solare, sicchè dalle osservazioni fatte in que-

st'epoca possiamo concludere che l'emisfero superiore o boreale è alquanto più caldo dell'inferiore o australe. Potrebbe obiettarsi a questa conclusione l'azione assorbente dell'atmosfera terrestre, ma l'altezza meridiana del sole nell'estate sotto la nostra latitudine è tanto grande da renderla insensibile affatto; inoltre per eliminare questa causa di errore direttamente si sono fatte molte osservazioni estrameridiane aspettando che i punti inferiori del disco arrivassero alla stessa altezza dei superiori, il che vedevasi facilmente dal movimento dell'imagine solare in un altro cannocchiale fisso in altezza, e mobile solo in azimut.

Per investigare in questa stagione se l'equatore fosse più caldo, era mestieri cambiare sistema di osservazioni, al qual proposito mi venne fortunatamente in pensiero che potevasi mettere a profitto l'obliquità che esso ha allora relativamente al parallelo del moto diurno, e così fare le osservazioni in vicinanza del meridiano ed eliminare direttamente l' influenza atmosferica terrestre.



Siano infatti *ab cd*, due corde parallele al moto diurno tracciate sul disco solare a distanza sopra il centro di 4′ o 5′, ed altrettanto sotto: l'equatore solare nel mese di giugno si proietta secondo un diametro che è prossimamente nella direzione *bd*: i punti *b* e *d* sono adunque più vicini all'equatore solare, che i punti *a* e *c*, e l'esperienza in realtà ha dato sempre *b* più caldo di *a* e *d* più che *c*. La temperatura di *b* è stata inoltre trovata in generale alcun poco più forte di quella di *d* e quella di *a* più che quella di *c*, la quale

ultima circostanza deve aver luogo qualora i due emisferi sieno inegualmente caldi.

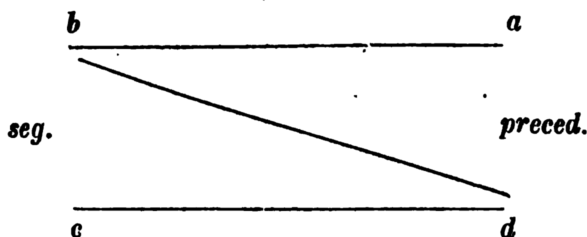
Questa esperienza più volte ripetuta e di cui daremo i numeri nel quadro finale estratto dal giornale delle osservazioni, sembra decidere la questione relativa al maggior calore dell'equatore solare, perchè essa porta la riprova in sè medesima, ed è indipendente dall'azione dell' atmosfera terrestre. Tuttavia avendo riguardo alla piccolezza delle differenze trovate, e per confermare vieppiù la conclusione, era dovere ripetere queste esperienze nel mese di settembre, quando l'equatore si projetta al di sotto del centro, e inoltre il diametro dell'ellissi che ne é la projezione ha una inclinazione opposta a quella di giugno relativamente al moto diurno (*).

Io le ho dunque continuate fino a questa epoca, e il risultato é stato il seguente. L'emisfero inferiore che nel mese di agosto mostrava come è detto differenze variabili col superiore, nel settembre si è mostrato decisamente più caldo del superiore. Tale fu il risultato costante dall' 8 settembre in cui si cominciò questa serie fino ai 4 ottobre in cui fu finita, e le osservazioni durante questo tempo furono quasi d' ogni giorno tranne una interruzione dal 20 settembre al 3 ottobre. Il massimo di differenza fu di circa 2° del galvanometro, onde è poco diverso da quello osservato in marzo nell'emisfero opposto. Un tal massimo ebbe luogo dal 14 al 16 settembre, che è pure l'epoca approssimata del massimo di depressione dell'equatore solare sotto il centro.

Ma perché questa coincidenza fosse dimostrativa, bisognerebbe provare che il sole voltava a noi in settembre il medesimo emisfero che in marzo: ora la durata della rotazione solare è tanto incerta che non può stabilirsi ciò sicuramente

(*) Non voglio omettere di dire che avendo io erroneamente fissato la direzione dell'equatore solare fidatomi di certe figure altrui, fui avvertito dell'errore dall'andamento delle temperature, e riconobbi pochi giorni dopo la correzione essere giustissima dal corso delle macchie.

se non dentro i limiti di parecchi giorni. Infatti raccogliendo alcune delle più celebri e recenti determinazioni della durata di questa rotazione, la troviamo secondo Delambre di 25^g, 01; secondo Wichman 25. 53. M. Laugier assegna estremi ancora più distanti, cioè 24. 28, e 26. 23, onde risalendo indietro, l'incertezza per sei rotazioni può salire a una mezza incirca. Adottando però per termine medio della rotazione relativa alla terra 27^g. 4 si trova che il medesimo emisfero solare era a noi rivolto nel 16 settembre e nei giorni 8 marzo, 4 aprile, 29 maggio, 25 giugno. Ora noi abbiamo fortunatamente una copiosa serie di osservazioni fatte nelle due epoche del 29 maggio e 25 giugno, le quali si accordano a dare il massimo di calore nell'emisfero superiore, mentre chè, come abbiamo veduto, nel settembre era nell'inferiore. Fa dunque mestieri concludere, o che sia avvenuta nell'emisfero australe una variazione di temperatura di circa $^1|_{10}$ del suo valore in gradi del galvanometro; o che questo cambiamento sia meramente apparente, e derivato dalla variazione di posizione dell'equatore solare rapporto alla terra. Dissi un cambiamento di circa $^1|_{10}$ perchè l'emisfero superiore superava di 1° ½ almeno l'inferiore nel mese di marzo, ed ora di altrettanto esso appariva men caldo, il che fa in tutto una diversità di 3° ed abbiamo già detto che l' ago nel centro, a pila aperta devia di circa 30°. Un simile cambiamento non è certamente impossibile, benchè poco verisimile avendo noi colle nostre esperienze abbracciato più di una intera rotazione, e perciò non potrebbe dirsi cambiamento locale. Questa sola possibilità però deve ritrarci dall' affrettare veruna conclusione che potrebbe essere prematura. Consultando i numeri vedesi che al principio e al fine del suddetto intervallo le differenze diminuiscono, ma questo è un effetto della mutazione di posizione dell'equatore medesimo, che cambia rapidamente rapporto al circolo di declinazione, come può riconoscersi calcolando gli angoli che esso fa col prefato circolo.



Per togliere quindi ogni incertezza ho creduto necessario ripetere le esperienze alle estremità delle corde. Siano come sopra le due corde *ba*, *cd*. In quest'epoca l'equatore o piuttosto il diametro dell'ellisse che ne è la proiezione è diretto da *c* ad *a*, come consta visibilmente dal moto delle macchie. Ora le esperienze diedero questa volta *a* più caldo di *b*, e *c* più che *d*. Queste differenze non erano molto grandi e comunemente tra 1° e ½ del galvonometro, ma la loro costanza supplisce alla piccolezza; nè può aspettarsi maggior differenza in punti collocati presso il lembo, e la cui forza è indebolita dal densissimo strato dell'atmosfera solare che devono attraversare i raggi per arrivare a noi. In queste esperienze fatte negli estremi delle corde è necessario avere una avvertenza, ed è di evitare i punti ove sono macchie o facole perchè la loro presenza fa variare notabilmente i risultati; e tale attenzione è tanto più necessaria quanto che le macchie sono a preferenza solite comparire in due zone parallele all' equatore solare e che in queste zone cadono i capi delle corde. Si sono soventi volte esaminati quattro punti collocati due sull'equatore e due presso i poli, e i risultati hanno combinato coi primi. Queste esperienze sono state poche perchè soggette alla obiezione su cui molti hanno assai insistito dell'atmosfera terrestre.

Un fatto che merita molta considerazione è l'influenza tanto sensibile delle macchie, che sembra estendersi assai al di là del limite visibile anche della loro penombra. Ho veduto talora una piccola macchia che insieme colla sua penombra

occupava appena $^1|_{100}$ dell'apertura della pila fare abassare la deviazione di 6° ed anche più, cioè almeno $^1|_{15}$ del calor totale. Eppure isolando la macchia con un piccolo diaframma essa avea un calore sensibile nella parte oscura. Un gruppò di queste passando pel centro fece una volta che la temperatura ivi fosse minore di oltre un grado di quella che era a 5′ di distanza da esso, ad onta che in questo sito l'atmosfera agisca fortemente. Il diminuirsi adunque del raggiamento in proporzione maggiore dell'area oscurata, mostra che l' effetto delle macchie si estende più lontano assai pel calore che per la luce. Questo potrebbe essere un effetto di termocrosi, ma potrebbe altresì ciò derivare verisimilmente da una notabile diminuzione di luce che ha luogo attorno di esse, ma che riesce poco sensibile all'occhio perchè essa è molto viva, sicchè il termoscopio che non è soggetto a cotale imperfezione propria delle sensazioni, può rivelarci una diminuzione che sfugge all'organo. E infatti la diminuzione di luce (non pare però quella di calore) dal centro agli orli che pure è tanto sensibile, ad onta che fosse riconosciuta da Luca Valerio accademico Linceo, venne fortemente contradetta dal Galileo (*); tanto è vero che l'occhio è cattivo giudice di queste diminuzioni. Le recenti osservazioni del sig. Dawes conducono ad ammettere una nuova atmosfera che riflette luce all'orlo interiore delle macchie, e nella ignoranza in cui siamo della vera causa di queste degradazioni non dobbiamo esser difficili ad ammetter che essa non possa andar gradatamente crescendo dall'orlo della penombra verso il resto della parte luminosa, il che anzi parmi probabilissimo (**). Qui adunque vediamo estendersi sempre più il

(*) Vedi Op. di Galileo. Firenze T. VIII p. 254, e T. VI pag. 198.

(**) Sul momento di mandare alla stampa questo foglio ho fatto diverse osservazioni solari col metodo del Sig. Dawes, cioè usando piccoli diaframmi all'oculare, e lasciando l'apertura del telescopio libera. Esaminando alcune macchie che osservate al modo solito parevano assai precisamente terminate, sono stato sorpreso al vedervi la moltitu-

campo di nostre ricerche, alle quali potranno riuscire molto utili i grandi strumenti mossi da orologio coi quali si possono fare queste osservazioni con molto maggiore precisione. Non sarà poco per me l' avere accennato la via, che credo la vera per arrivare a conoscere con qualche certezza ciò che finora é stato solamente materia di congetture.

Tra le cose che sono avvolte in gran mistero, vi sono le protuberanze rosse vedute in epoca di eclissi solari: alcuni hanno sospettato qualche relazione tra esse e le macchie, ma la rarità delle circostanze in cui tali fenomeni sono visibili, non permettono che si risolva la questione. Ho accennato nell'art. precedente p. 208 gli inutili tentativi fatti per produrre eclissi artificiali, ponendo nel foco del telescopio diaframmi circolari opachi della grandezza dell'imagine solare onde ricevendo solamente i raggi degli orli estremi potessero riuscire visibili le prefate protuberanze. Ho anche tentato di ricercarle colla pila termo-elettrica, facendo cadere su di essa i raggi che passavano rasente all'orlo del sole, e anche questi tentativi sono riusciti vani; ma la difficoltà di bene condurre queste ricerche è troppo grande e appena da sperarsene buon successo con un equatoriale non mossso da orologio; onde non è improbabile che con migliore strumento possa ottenersi l'intento. Ad occasione del fatto detto di sopra che le macchie solari indeboliscono tanto il calore, domanda il signor Faye, se mai esse non sarebbero condensazioni di vapori formatisi nell'atmosfera solare, sulle regioni meno calde, appunto al modo che vediamo le nostre nebbie formarsi a pre-

---

dine delle facole, e punti oscuri che vi si scoprivano attorno. La superficie del sole pareva un mare in burrasca, tante erano le inegua glianze di luce che vi si vedevano; anche le parti più uniformi apparivano tutte punteggiate nè molto dissimili dall'aspetto di un campo arato di fresco. Anche proiettando su di un ampio cartone bianco il sole si possono veder molte di queste ineguaglianze, ma il piccolo diaframma ne scopre molto di più. Sicchè la congettura emessa di sopra può considerarsi come una verità dimostrata.

ferenza sui luoghi nei quali cambia rapidamente la temperatura. Quello che si può assicurare è che le facole che spesso trovansi miste alle macchie non compensano punto la diminuzione di calore prodotta da queste, anche quando la loro superficie supera quella delle macchie, onde potrebbe sospettarsi che le facole non sieno molto più calde del resto, ma solamente siano prominenze sul disco solare. Le ho vedute più volte presentarsi ad un orlo assai larghe e decise, e venire sempre più restringendosi nell' accostarsi al mezzo del disco e ricomparire allargate di nuovo dall'altra parte, appunto come avvenir deve di altissime montagne. La luce delle facole relativamente a quella delle parti in cui compariscono, e molto più intensa quando trovansi presso gli orli che presso il centro. Ciò potrebbe spiegarsi ammettendo che esse in gran parte si innalzino sopra lo strato più denso ed assorbente dell'atmosfera solare. Essendo ordinariamente foriere delle macchie, questo combinerebbe con quello che dicevamo, poichè le macchie devono essere precedute da agitazioni enormi della fotosfera solare che ne innalzano come delle immense onde le cui cime sorpassano lo strato più denso della soprastante atmosfera.

Per ciò che riguarda le diversità di temperatura da esplorarsi sull'equatore solare secondo i differenti meridiani, abbiamo già detto da principio perchè non ce ne siamo occupati.

Tra le belle scoperte a cui hanno dato occasione le attuali ricerche é quella della termocrosi atmosferica dovuta al sig. Melloni. Egli rifletteva ingegnosamente, che una parte della diversità ritrovata nella temperatura delle varie parti del disco, poteva nascere dalla termocrosi della atmosfera solare medesima, la quale non è improbabile che sia diversa da un punto all'altro di quel luminare, e fu così condotto a cercarla nell'atmosfera terrestre. Questa egli trovò realmente termocroica, e vide che mentre l'acqua lascia passare proporzione maggiore di raggi al mezzodì che alla mat-

tina, pel quarzo affumicato accade il contrario. Avendomi egli cortesemente invitato a proseguire analoghe ricerche per l'atmosfera solare ho fatto diversi esperimenti su questo soggetto, benché a dir vero non in gran numero, essendo io stato occupato più specialmente in accertare i punti esposti di sopra. Ho dunque collocato avanti alla pila successivamente il quarzo puro e l'affumicato, l'acqua, il vetro verde e l'allume, e cercato se cambiava notabilmente il rapporto delle intensità tra le varie parti. Il successo non è stato decisivo, perchè i raggi passati pei vetri del telescopio subiscono grandissime perdite nell'attraversare queste altre sostanze, e nelle intensità così indebolite le diversità trovate divenivano dell'ordine stesso degli errori inevitabili nelle esperienze, onde è necessario rifare queste ricerche con ulteriori cautele. Osserverò qui di passaggio che la spessezza dei vetri del telescopio è più che sufficiente a rendere il raggiamento calorifico trasmesso unicamente composto di quei raggi che passar possono pei vetri, onde se anche delicatissime esperienze condotte col metodo da me adoperato avessero un risultato negativo, non proverebbero essere atermocroica l'atmosfera solare, e forse bisognerebbe tentarle con lenti di varia natura, come per esempio quarzo, sal gemma ecc. o almeno con lenti di vetro ma sottilissime quali sono le antiche a lungo foco del Divini e del Campani.

A proposito poi di simili ricerche, il nostro equatoriale parvemi pure opportuno per esplorare la termocrosi dell'atmosfera terrestre senza farvi intervenire la riflessione speculare Per ciò tolti i vetri e ridotta l'apertura del tubo a piccole dimensioni con un diaframma di 8^{mm} di diametro ho interposto varie sostanze, la maggior parte delle quali se ha mostrato differente porporzione non ha manifestato inversione: questa però si è veduta nell'acqna e nel quarzo affumicato (*). I numeri sono stati differenti da quelli del signor Melloni

(*) Della qualità cioé così chiamata dai mineralogisti, e non coperto di negrofumo.

ma questo credo debba attribuirsi all'essere il nostro quarzo poco fosco. La difficoltà di ottenere in queste esperienze un risultato preciso è molto grande, specialmente presso l'orizzonte pel rapidissimo variare che fa la forza del raggiamento, e quello che è più la temperatura stessa assoluta della pila, che necessariamente deve concorrere in tali differenze. Perchè quantunque sia dimostrato che le deviazioni dell'ago sono porporzionali alla forza del raggiamento quando la pila sta a certa temperatura, non ne segue *che la proporzionalità debba aver luogo colla stessa legge di prima* ad una temperatura della pila diversa dalla precedente. Questo dubbio a cui non ho veduto data finora soluzione alcuna mi ha fatto metter da parte numerosissime esperienze fatte con gran fatica per trovare la legge di assorbimento dell'atmosfera terrestre nelle varie ore del giorno, le quali saranno ripigliate e discusse quando abbia dissipato le difficoltà insorte su questo proposito.

Soggiungo un quadro dei risultati numerici su cui si apoggiano le conclusioni superiori, questi sono estratti da una molto più copiosa serie che trovasi nei giornali di osservazione e che sarebbe troppo lunga ed inutile il qui trascrivere: le attuali però sono sufficienti a dare una idea degli altri. Quando i risultati di molte serie non differivano più che di 0. 2 di grado ho preso il medio comune, le altre si sono conservate come erano meramente copiandole dall'originale. Del resto io sono ben lungi dal credere questo soggetto esaurito, anzi non dubito di asserire che i risultati ottenuti, allora solamente potranno passare allo stato delle verità fisiche dimostrate quando dopo una lunga e costante serie di osservazioni fatte coll'assiduità stessa delle osservazioni meteorologiche saremo arrivati ed eliminare le variazioni accidentali che non possono a meno di non esser grandissime in un corpo della natura che è il sole e che trovasi in circostanze fisiche tanto singolari a noi completamente sconosciute.

QUADRO DEI RISULTATI OTTENUTI NELLE

ESPERIENZE ELIOTERMICHE.

GIORNI	*Distanza del centro della pila al centro del disco*					OSSERVAZIONI
	+ 14.2	+ 10.5	Centro 0	— 10.5	— 11.2	
30 Marzo	24°.7	30°.8	33°.3	30. 3	23. 0	5. Rotaz. dal 16 Sett.
24 Giug.	21. 5	23. 3	26. 1	22. 8	20. 7	4. Rotaz.
8 Sett.	8. 5	12. 5	17. 0	12. 8	8. 3	diaframma piccolo.
detto	4. 2	8. 7	9. 5	9. 0	4. 3	coll'acqua.
13 Sett.	5. 1	8. 1	10. 2	8. 7	5. 5	istrom. minore.
14 Sett.	16. 3	23. 0	27. 5	24. 5	16. 8	senza diafr.
detto	. . . .	13. 1	16. 7	14. 7	. . . .	coll'acqua.
detto	9. 3	13. 2	16. 2	14. 3	9. 3	col diaframma.
15 Sett.	18. 6	23. 4	27. 8	24. 2	18. 8	
detto	. . . .	6. 5	7. 0	6. 9	. . . .	quarzo affumicato.
19 Sett.	17. 4	23. 8	27. 5	24. 9	17. 5	
5 Ottob.	21. 7	27. 6	32. 0	28. 0	21. 6	

ESPERIENZE ALLE ESTREMITA' DELLE CORDE

N.B. *Le lettere sono relative alle figure date di sopra*

GIORNI	(*a*)	(*b*)	(*c*)	(*d*)
5 Giug.	17. 7	18. 2	18. 1	18. 6
6 Giug.	21. 0	21. 8	20. 8	21. 5
detto	20. 0	20. 2	18. 3	20. 2
24 Giug.	14. 0	14. 7	13. 0	13. 5
detto	14. 2	14. 8	15. 8	16. 7
30 Giug.	15. 9	17. 0	13. 5	15. 0
13 Sett.	20. 1	19. 5	21. 2	20. 1
17 Sett.	20. 3	20. 0	20. 9	20. 0

Quel che si è detto finora non è sufficiente per fissare la legge colla quale procede il decremento di temperatura dal centro agli orli dovuto all'azione dell'atmosfera solare; ma è evidente che questa seconda questione non poteva risolversi senza aver precedentemente esaminato la prima, vale a dire se la temperatura del corpo raggiante fosse eguale dappertutto, ed ora nel cercare la legge dell'assorbimento prodotto dalla sua atmosfera dovremo tener conto delle irregolarità scoperte. Benchè le esperienze fatte fin quì non sieno state, come ho detto, dirette al fine di trovare la legge dell'assorbimento, pure ad occasione che il sig. Plana ha esposto nel n°. 813 dell'*Astronomische Nachrichten* alcune formole molto più semplici che quelle di Laplace per calcolare qual sarebbe la quantita di luce che noi riceveremmo dal sole, se quest'astro fosse spoglio di atmosfera assorbente, ho voluto rifare questo calcolo servendomi dei numeri trovati nella prima serie delle mie ricerche, perchè in quelli il diafram-

ma usato era assai ristretto. Prendendo per tanto un medio tra i valori dell'intensità sopra e sotto il centro e così supponendo la curva simmetrica, si avranno i seguenti dati fondamentali, abbastanza approssimati.

Distanza dal centro	0'.0	Intensità $\mu =$	1 00
. . . .	11.10	. . . .	85. 06
. . . .	14. 92	. . . .	55.86

È cosa degna di osservazione che trovando per interpolazione sulla curva media dedotta dalle nostre osservazioni l'intensità calorifica per un punto distante dal centro 3/4 del diametro solare si trova $\mu = 0.725$: ora il numero dato da Bouguer relativamente alla luce nello stesso luogo è $= 0.729$. la quale coincidenza quasi completa, prova che per la luce e pel calore non deve esservi grande disuguaglianza.

Per intendere i risultati del calcolo, è necessario premettere alcune cose. Si immagini un osservatore nel punto che per noi corrisponde al centro del disco: esso avrà la terra al suo zenit; quando noi collochiamo la pila fuori del detto centro, il punto esplorato ha per l'osservatore supposto una distanza zenitale θ, il qual angolo ha per seno la distanza della pila al centro del disco. I due punti che noi abbiamo assunto disterebbero adunque dal vertice di quell'osservatore il primo 43° 55', e l'atro 68° 49'. Quest'ultimo è un limite molto superiore alla distanza in cui la legge supposta da Laplace per le rifrazioni terrestri trovasi esatta, e sulla quale in sostanza è basata quella dell'assorbimento. Se si supponga adunque una legge determinata di assorbimento e dietro questa dalla intensità di calore e di luce osservata in due o più punti a distanza nota dal centro, si cavi la diminuzione di intensità che ha luogo nel centro stesso per l'azione dell'atmosfera solare; il valore di questa deve esser identico nei due casi. Colla stessa ipotesi si potrà anche calcolare quale sia la perdita che soffre la luce o il calore emanato da tutta la superficie solare nel passare per la sua pro-

pria atmosfera, e se la legge supposta è giusta, questi valori altresì devono esser uguali ancorchè si deducano da osservazioni fatte in punti differenti. Partendo adunque dalla ipotesi di Laplace il calcolo dà i risultati compresi nel seguente quadro.

Posizione prossima de'punti sul raggio del disco.	Angolo θ	Intensità residua al centro	Intensità totale residua	La stessa approssimata
$\frac{2}{3}$	43°. 55	0. 2832	0. 1019	$\frac{1}{10}$
$\frac{3}{4}$	48. 34	0. 2406	0. 0794	$\frac{1}{12}$
$\frac{7}{8}$	68. 49	0. 4045	0. 1711	$\frac{1}{6}$
	Medio	0. 3095	0. 1172	

La prima colonna dà il valore approssimato della distanza del punto esplorato al centro del disco, in parti del raggio del disco medesimo.

La 2ª, l'angolo θ di cui abbiamo parlato sopra.

La 3ª, l'intensità residua della luce al centro del disco dopo aver passato la spessezza dell'atmosfera solare, essendosi presa per unità la sua intensità primitiva quale è nella fotosfera.

La 4ª, dà il valore della intensità totale residua della luce quale si ha attualmente, essendo presa per unità quella che si avrebbe se il sole fosse privo di atmosfera.

La 5ª, dà lo stesso valore in numeri tondi che pel caso nostro sono sufficienti.

Il valore della 1ª e 3ª linea orizzontale è dedotto direttamente dagli esperimenti nostri, quello della seconda è

quello di Bouguer corretto secondo l'indicazione di Plana e desumendo i dati dalla interpolazione fondata sulle nostre osservazioni.

Anche una semplice occhiata alle colonne 3ª e 4ª che contengono i valori che dovrebbero essere costanti, fa vedere che l'ipotesi di Laplace non può sostenersi in modo alcuno, anche lontano da quei limiti che egli credeva non potersi passare nel farne l'applicazione.

Quantunque ulteriori esperienze siano per dare elementi più accurati per questo calcolo, la diversità però è tanta da non poterne sperare un successo gran fatto migliore. Tuttavia per un approssimazione grossolana possiamo dire, prendendo un medio, che l'atmosfera solare al centro assorbe circa sette decimi del calor totale, e che l'intensità totale del calore che attraversa l'atmosfera solare per arrivare a noi è poco più di un decimo di quello che ha luogo nella fotosfera stessa; cioè che senza l'inviluppo assorbente di cui è dotato il sole, esso ci apparirebbe quasi 10 volte più caldo ed altrettanto più lucente. Dopo ciò ognuno vede quale idea noi dovremo formarci della elevazione di temperatura che ha luogo nella fotosfera solare, se quella che deducesi dalla sola diminuzione in ragione inversa del quadrato delle distanze, prendendo a base l'intensità quale noi l'abbiamo alla superficie terrestre, supera già ogni nostra imaginazione! Voggasi su di ciò quanto dice Sir I. Herschel *Outlines of Astron.* n. 396 e segg. Per produrre un tanto assorbimento l'atmosfera solare dovrà essere in proporzione molto più densa di quella che circonda il nostro globo. Ma questa atmosfera sarà essa quella che forma la corona visibile nelle ecclissi? e di quanto supererà essa l'altezza a cui arrivano le protuberanze rossastre che secondo alcuni osservatori sarebbe di più diametri terrestri? Il sig. Faye crede che innanzi di estendere i limiti di questa atmosfera debbansi aver riguardo a lasciar libero un sufficiente spazio pel corso delle

comete. La gran cometa del 1843 nel suo perielio passò a distanza dalla superficie del sole di circa $^1/_7$ del semidiametro solare vale a dire che essa sarebbesi veduta (se fosse stata cospicua) alla distanza di poco più che due minuti dal lembo. Le protuberanze non hanno finora superato tal elevazione apparente, ma la *corona* estendendosi a circa mezzo grado occuperebbe parte notabile dello spazio necessario al moto libero delle comete, le quali pur circolano attorno al sole secondo le leggi di Keplero. Forse alcune irregolarità non ancora ben conosciute nel moto di questi astri e la diminuzione apparente del volume di alcuni di essi, e forse anche di massa (cosa non più improbabile, giacchè abbiamo veduta perseverare la divisione della cometa di Biela in due), potranno avere spiegazione nella resistenza al loro moto dell'atmosfera solare come la suddetta divisione della cometa di Biela può essere avvenuta dallo scontro con qualche asteroide le cui orbite essa attraversa. Questo è un soggetto a dir vero molto oscuro, in cui solo si possono fare congetture, ma nuovi studi potranno spargervi qualche lume; non è poco sapere a quale scopo debbano tendere le ricerche forse il moto delle comete potrà un giorno istruirci sui limiti dell'atmosfera solare , come l'assorbimento calorifico e luminoso ce ne svela l'esistenza (*).

(*) I sentimenti e le congetture del Sig. Faye sui punti esposti di sopra, sono stati estratti da una sua cortesissima lettera scrittaci dopo la comunicazione dei nostri lavori da esso fatta all'accademia di Francia. La prima di queste comunicazioni (V. C. R. T. XXXIV, p. 643) diede luogo ad alcune osservazioni del sig. Arago inserite nel C. R. T. XXXIV, pag. 657, nelle quali l'illustre secretario dell'Accademia richiamava alcuni de'suoi antecedenti lavori fotometrici, e insieme altri progetti da se ideati per esplorare il calor solare, mediante termometri collocati nella imagine solare di un grande obiettivo acromatico. Questi preparativi erano in corso a mia insaputa quando io mi occupava di queste ricerche. Nè io poteva averne contezza, non essendo cosa alcuna di tali progetti pubblicata nei Conti Resi, ed essendosi tutto passato a

viva voce o nella accademia o nel *Bureau delle longitudini*. La memoria letta il 29 aprile 1850, vi è solamente annunciata e lo stesso estratto della memoria del 20 Maggio dello stesso anno non contiene punto cosa alcuna relativa al calore. Così pure nel discorso pronunziato dal medesimo nella seduta pubblica dell'Accademia e publicato nel Giornale l'*Institut* 14 e 21 Gennaio 1852, nulla trovasi di particolare che sia relativo al calore.

Tuttavia dalle parole del sig. Arago qualche giornale prese occasione di riguardare queste ricerche come una occupazione degli altrui scientifici diritti: però non altro intendeva che assicurare per se la priorità di pensamento, il che io non esitai a riconoscere nella mia lettera inserita nel C. R. T. XXXIV, p. 949.

Il metodo però da esso ideato dovea riuscire in pratica più arduo assai del mio, giacchè vedo che l'imagine diretta ottenuta con un obiettivo di $4^{m},80$ e del diametro di 10 pollici (non acromatico) che esiste in questo osservatorio, è assai piccola relativamente alla grandezza di qualunque anche piccolissimo termometro, quali sono alcuni di Bellani e Bunsen che non eccedono 2 millim. in diametro del bulbo. Molto tempo fa io avea fatto il progetto di esaminare il calore delle macchie solari con un grande obiettivo di campani di 35 piedi di lunghezza focale usando però la pila termoelettrica. Ma la difficoltá di fissare questa relativamente alla lente, avea reso inutile ogni tentativo, tanto più che io non poteva fare tali esperienze che presso il tramonto e a sole molto indebolito. Anche il sig. Arago come apparisce nella citata communicazione del 3 maggio 1852 avea avuto la stessa idea per il calore solare ma trovatovi varie difficoltà.

BIBLIOGRAFIA

Elementi di Fisica esposti dal prof. M. Zannotti. Seconda edizione interamente rifatta dall'Autore sopra un novello disegno Vol. 2. in 8.° Napoli. Tipografia di Federico Vitale, Largo Regina Coeli n. 2. Il 1.° vol. di pag. 454, *è stato pubblicato nel* 1850 : *il vol.* 2°. *di pag.* 580 *pubblicato nel* 1852, *con tavole* 29 *incise in rame*

Seneca parlando della Comete disse :

« Non ci rechi meraviglia che al presente s'ignori la legge

dei movimenti delle comete che rare volte si vedono e non si conosca il principio ed il fine della rivoluzione di questi astri che da una distanza smisurata a noi ritornano. Verrà un tempo in cui le cose che ora sono occulte richiamerà a chiara luce lo studio e la diligenza dell'età avvenire, in cui i nostri posteri si meraviglieranno della nostra ignoranza. Verrà un tempo in cui alcuno mostrerà in quali parti del cielo si rivolgono le comete, e perchè sì lungi dagli altri astri camminino, e quante e quali siano ».

Quanto Seneca nel suo entusiasmo presagiva riguardo alle comete, ci sembra che si potesse pur dire della Fisica la quale, in quell'epoca specialmente, tutta consisteva in opinioni, e non verità, in pensamenti di una setta particolare, e non dogmi di fisica, in dottrine infeconde, e non principii per la spiegazione dei fenomeni. Questo stato durò fintanto che Galileo Galilei, tra i primi, spinto dal suo genio e vinte le avversioni e le massime radicate per più secoli, prese ad interrogare, e seppe intendere il muto linguaggio della natura. Giunse così per la fisica quell'epoca che per le comete profettizzava Seneca, come viene dimostrato dai più accreditati corsi di questa scienza, che da tal'epoca fino ad oggi sono stati pubblicati. A maggior conferma di quanto asserivamo ci è grato far quì particolare menzione dell' indicato corso di fisica del prof. Zannotti.

Decorsi più secoli di non mai interrotti esperimenti fisici, dopo riprodotti sotto tante e variate circostanze i fenomeni della natura, dopo conosciute e confermate dal tempo e dai fatti le leggi colle quali opera questa natura, non restava altro che partire da questi principii e con essi, ajutati del potente mezzo del calcolo e della geometria, procedere alla deduzione di necessarie consegnenze. Quindi col dotto Autore conveniamo che nella esposizione delle teoriche fisiche debbasi oggi far uso del calcolo: ma nello stesso tempo è nostro desiderio che in corrispondenza venghino al fine coor-

dinati gli studii della elementare filosofia, affinchè il Santuario della scienza non si presenti ingombro di difficoltà fino dal suo limitare. Con questo desiderio, che solo può essere adequatamente apprezzato da chi dedicò gli anni di sua vita alla istruzione, diremo che l'egregio Professore Zannotti ha diviso il suo lavoro in nove libri, e ciascuno in certo numero di sezioni, onde meglio distribuire e classificare le materie da esso con molta chiarezza sviluppate.

Il primo e secondo libro è dedicato alla esposizione delle nozioni di meccanica razionale, nella quale, con brevi e dirette dimostrazioni, vengono stabiliti e svolti i principii della dinamica, che è quanto dire vengono collegate in formule le principali leggi delle forze, ossia delle cagioni dei fenomeni fisici considerati sotto il carattere comune di movimento. Succedono a questi principii quelli della composizione e decomposizione delle forze, i quali sono immediatamente applicati alla ricerca dei centri di gravità; e coll' ajuto degli uni e degli altri principii passa l'A. alla discesa verticale dei corpi nel vuoto, lungo i piani inclinati, e per archi di curva, alle oscillazioni dei pendoli circolari, ed alla gravitazione universale.

Le forze molecolari formano il soggetto del terzo libro nel quale, dopo la loro classificazione, si parla del calore in ordine ai suoi effetti molecolari, della compressione e dilatazione dei corpi, della influenza di esse sulla loro temperatura, del calore specifico, del cangiamento di stato dei corpi, ed infine dei principali termometri.

Come applicazione delle verità sviluppate e discusse nei tre precedenti libri, nel quarto si tratta della Idrostatica ed Idrodinamica. Nella prima colla consueta chiarezza si svolgono dall'A. le leggi dell'equilibrio dei liquidi, dei fenomeni capillari, dell'equilibrio dei gas, della tensione dei vapori, e dell' equilibrio di questi nei gas: nella seconda l'A. tratta quanto evvi di maggiore interesse intorno all' efflusso dalle luci dei reci pienti, al movimento dell'acqua nei tubi e nei canali, ed all'ef-

flusso e condotta dei gas: applica le verità idrodinamiche ai fiumi, e quelle idrostatiche alla determinazione delle densità nei solidi, nei liquidi, e nei corpi aeriformi.

L'acustica, colla quale compiesi il primo volume, forma il tema del quinto libro, in cui si contiene quanto di maggiore interesse può presentarsi in un corso di fisica.

Il sesto libro, col quale ha principio il secondo volume, è destinato allo sviluppo di ciò che spetta alla Elettrostatica ed Elettrodinamica. Nella prima l'A. considera l'elettricità prodotta per attrito, e dei mezzi per misurarla, l'elettricità indotta , e le differenti sorgenti di elettricità statica. La Pila di Volta, i fenomeni magnetici, quelli della Pila, le diverse forme dell' apparato voltiano, la teorica di Ohm sulle leggi della pila, e l'induzione elettrodinamica formano i temi della elettrodinamica medesima, le sorgenti della quale vengono divise in azione chimica e contatto, in azione termica, ed azioni fisiologiche.

Non manca il chiaro A. applicare le dottrine esposte nel presente libro alla telegrafia elettrica, ed alle arti.

Nel libro settimo si tratta della luce diretta, della riflessione speculare , della rifrazione semplice , degli strumenti ottici, delle interferenze, doppia rifrazione, fenomeni di polarizzazione e dei colori.

Il libro ottavo contiene quanto può desiderarsi a complemento della teorica del calore del quale trattò l'A. nel 1.° volume.

Colla Meteorologia, cioè i venti, le idrometeore, la temperatura terrestre, ed i fenomeni luminosi dell'atmosfera, che formano il nono libro, si compie il corso di Fisica dell'egregio Sig. Prof. Zannotti, e colla esposizione delle materie in esso trattate crediamo aver dato un saggio dello stato attuale di quella scienza fisica, che, al dire dell'A.se privata venisse del sussidio delle scienze esatte, sarebbe l'istesso, se fosse possibile, che farla retrocedere di due secoli. M.r A.

INTORNO LE SVILUPPOIDI E LE SVILUPPATE
RICERCHE
DEL SIG. PROF. FRANCESCO BRIOSCHI.



La teorica delle sviluppate a doppia curvatura delle linee piane, e delle sviluppate delle linee a doppia curvatura è dovuta a Monge. Nella sua memoria che fa parte del tomo X delle Memorie presentate all'Istituto di Parigi e forma un capitolo dell'opera « Application de l'Analyse a la Geometrie » si rinvengono l'equazione della superficie sviluppabile luogo geometrico delle sviluppate di una data linea, e le equazioni alle derivate mediante le quali si determinano nei casi particolari le sviluppate medesime. Lancret in una memoria inserita nel Tomo II (An. 1811) dell'ultima serie delle Memoires présentés prese a considerare le sviluppoidi delle linee piane, e delle linee a doppia curvatura, ossia le curve di cui le tangenti vengono segate da una curva data qualunque sotto un angolo costante, le quali comprendono come caso speciale le sviluppate; Altre memorie più recenti esistono su questo argomento, e fra le principali quella del prof. Minich sullo sviluppo delle curve piane, quella del prof. Molins sulle sviluppate delle linee a doppia curvatura, e quella del Prof. De Morgan sulle sviluppate delle linee sferiche (1).

In questo breve lavoro presentiamo alcune proprietà generali delle sviluppate e delle sviluppoidi le quali si ricavano spontanee dalla loro definizione.

La porzione della retta tangente la sviluppoide e secante la curva data (trajettoria) sotto un angolo dato, compresa fra

(1) Nuovi saggi dell'accademia di Padova. Vol. V. — Journal de Liouville T. VIII. — The Cambridge and Dublin Mathematical Journal. November 1851.

il punto di contatto, ed il punto di intersezione chiamasi raggio della sviluppoide, e denomineremo punti corrispondenti i punti su indicati.

Indicheremo con x, y, z, s le coordinate di un punto qualunque, e l'arco di una sviluppoide o di una sviluppata di una curva qualunque; e con p, q, r, σ le coordinate del punto corrispondente, e l'arco della trajettoria o della sviluppante. Chiamando t il raggio della sviluppoide, per la definizione si avranno le equazioni:

$$(1) \qquad p = x + t\frac{x'}{s'}, \quad q = y + t\frac{y'}{s'}, \quad r = z + t\frac{z'}{s'}$$

$$(2) \qquad p'x' + q'y' + r'z' = s'\sigma' \cos.\omega$$

nelle quali gli accenti quando non si avverta altrimenti, indicano derivate rispetto ad una variabile di cui si ritengono funzioni le p, q, r, x, y, z ed ω è l'angolo costante che la tangente alla trajettoria nel punto di coordinate p, q, r fa colla tangente alla sviluppoide nel punto corrispondente di coordinate x, y, z. Allorquando $\omega = \frac{\pi}{2}$ la sviluppoide diventa la sviluppata.

Per determinare il valore di t si derivino le equazioni (1), ed i valori di p', q', r' si sostituiscano nella (2), si ottiene la:

$$s' + t' = \sigma' \cos.\omega$$

dalla quale indicando con c la costante introdotta dalla integrazione si ha:

$$t = \sigma \cos \omega + c - s$$

e per le sviluppate

$$t = c - s.$$

Dalle equazioni (1), (2) eliminando i coseni $\frac{x'}{s'}$, $\frac{y'}{s'}$, $\frac{z'}{s'}$ si ottiene:

$$(p-x)p'+(q-y)q'+(r-z)r'=\sigma'\cos\omega\,(\sigma\cos\omega+c-s)$$

equazione di un cono retto avente il vertice al punto di coordinate p, q, r; di cui l'asse è la tangente la trajettoria nel medesimo punto, e di cui l'apotema fa coll'asse l'angolo ω. Derivando l'equazione stessa avendo riguardo alla (2) si ottiene:

$$(p-x)p''+(q-y)q''+(r-z)r''+\sigma'^2\operatorname{sen}^2\omega$$
$$=\sigma''\cos\omega\,(\sigma\cos\omega+c-s).$$

Se da questa equazione, e dalla penultima si eliminasse la variabile rispetto alla quale sono prese le derivate si avrebbe la equazione della superficie luogo geometrico delle sviluppoidi. Dalle medesime equazioni scorgesi facilmente essere la caratteristica di questa superficie una curva piana anzi una iperbole.

Ponendo per brevità $\frac{t}{s'}=v$ è derivando le equazioni (1) si hanno le:

(3) $p'=(1+v')x'+vx''$, $q'=(1+v')y'+vy''$, $r'=(1+v')z'+vz''$

le quali quadrate e sommate danno:

$$\sigma'^2=(1+v')^2s'^2+2v(1+v')s's''+v^2(x''^2+y''^2+z''^2).$$

Ora dal valore di v ricavasi:

$$(1+v')s'+vs''=\sigma'\cos\omega$$

per cui sostituendo:

$$\sigma'^2\operatorname{sen}^2\omega=v^2(x''^2+y''^2+z''^2-s''^2)$$

ed indicando con ρ il raggio di curvatura della sviluppoide al punto di coordinate x, y, z si ha:

$$\rho\sigma'\operatorname{sen}\omega=ts'$$

e pel caso delle sviluppate:

$$\rho\sigma'=ts'.$$

Le equazioni (3) moltiplicate ordinatamente per x'', y'', z'' e sommate, allorquando ritengasi la s essere la variabile principale danno la :

$$p'x'' + q'y'' + r'z'' = t(x''^2 + y''^2 + z''^2)$$

e questa moltiplicata per $\frac{\rho}{\sigma'}$ mutasi nella

$$\cos b_1 = \frac{t}{\rho\sigma'} = \operatorname{sen}\omega$$

essendo b_1 l' angolo che la tangente alla trajettoria fa col raggio del circolo osculatore la sviluppoide nei punti corrispondenti. Quando $\omega = \frac{\pi}{2}$ sarà $b_1 = 0$, cioè la sviluppata è geodetica sulla superficie polare.

Se dalle equazioni (3) si elimina il binomio $(1 + v')$ si ottengono le :

$$p'y' - q'x' = v(y'x'' - y''x'), \quad r'x' - p'z' = v(x'z'' - x''z'),$$
$$q'z' - r'y' = v(z'y'' - z''y')$$

le quali moltiplicate ordinatamente per z'', y'', x'' e sommate membro per membro, indicando con c_1 l'angolo che la tangente alla trajettoria fa colla perpendicolare al piano del circolo osculatore la sviluppoide, danno :

$$\cos.c_1 = 0,$$

ossia la tangente la trajettoria è la comune intersezione dei piani osculatori alle due curve in punti corrispondenti.

Derivando nuovamente le equazioni (3) si hanno le seguenti :

$$p'' = v''x' + (1 + 2v')x'' + vx''',$$
$$q'' = v''y' + (1 + 2v')y'' + vy''',$$
$$r'' = v''z' + (1 + 2v')z'' + vz'''.$$

Si moltiplichino queste equazioni ordinatamente per x', y', z' e sommandole membro per membro si avrà

$$p''x' + q''y' + r''z' = v''s'^2 + (1 + 2v')s's'' + v(x'x''' + y'y''' + z'z''').$$

Riteniamo per maggiore semplicità essere σ la variabile principale, sussisterà la equazione:

$$(1 + 2v')s's'' + v's'^2 = -vs's''' ,$$

per cui sostituendo:

$$p''x' + q''y' + r''z' = -v\frac{s'^4}{\rho^2} .$$

Chiamando d il raggio di curvatura della trajettoria al punto di coordinate p, q; r; ed a_2 l'angolo che il raggio stesso fa col raggio della sviluppoide, si ha:

$$\cos.a_2 = -t.\mathrm{d}\frac{s'^2}{\rho^2}$$

ossia per l'equazione (4):

$$\cos.a_2 = -\frac{\mathrm{d}}{t}\,\mathrm{sen}^2\omega .$$

Da questa ponendo per t il suo valore ricavasi:

$$s = \mathrm{d}\frac{\mathrm{sen}^2\omega}{\cos.a_2} + \sigma\cos\omega + c$$

Se $\omega = \frac{\pi}{2}$ sarà

$$s = \frac{\mathrm{d}}{\cos.a_2} + c ,$$

e se la sviluppante e la sviluppata sono linee piane $\cos.a_2 = 1$, e si ha la notissima:

$$s = \mathrm{d} + c.$$

Se la trajettoria e la sviluppoide sono piane gli angoli ω, a_2 sono l'uno complemento dell'altro e si ha:

$$s = \mathrm{d}\ \mathrm{sen.}\omega + \sigma \cos.\omega + c$$

la quale formola venne già data dal Prof. Minich.

Dai valori trovati di p', q', r', p'', q'', r'', si ricavano le seguenti equazioni:

$$r'q'' - r''q' = (1+v')\left[\left(1+2v' - \frac{vv''}{1+v'}\right)(z'y''-z''y') + v(z'y'''-z'''y')\right]$$
$$+ v^2(z''y''' - z'''y'')$$

$$p'r'' - p''r' = (1+v')\left[\left(1+2v' - \frac{vv''}{1+v'}\right)(x'z''-x''z') + v(x'z'''-x'''z')\right]$$
$$+ v^2(x''z''' - x'''z'')$$

$$q'p'' - q''p' = (1+v')\left[\left(1+2v' - \frac{vv''}{1-v'}\right)(y'x''-y''x') + v(y'x'''-y'''x')\right]$$
$$+ v^2(y''x''' - y'''x'')$$

Queste ordinatamente moltiplicate per $\frac{x'}{s'}$, $\frac{y'}{s'}$, $\frac{z'}{s'}$ e sommate danno avendo riguardo all'equazine (4):

$$\varphi'\cos.a_3 = \psi'.\mathrm{sen}^2\omega\ ,$$

nella quale a_3 indica l'angolo che il raggio della sviluppoide fa colla perpendicolare al circolo osculatore la trajettoria, φ l'angolo di contingenza della trajettoria, ψ l' angolo di torsione della sviluppoide.

Se le equazioni superiori si moltiplicano ordinatamente per x'', y'', z'', e si sommano, ritenendo le derivate prese rispetto alla variabile s, ed indicando con b_3 l'angolo che il raggio di curvatura della sviluppoide fa colla perpendicolare al piano del circolo osculatore la trajettoria si ottiene:

$$\varphi' \cos.b_3 = \psi'.\mathrm{sen}.\omega.\ \cos.\omega.$$

Le sei rette che qui si considerano cioè le tangenti alle due curve, i raggi dei loro circoli osculatori, e le perpendicolari ai piani dei circoli medesimi costituendo due terne di rette ortogonali, avranno luogo tra gli angoli che esse formano fra loro le note relazioni. Quindi indicando con c_2, c_3 gli angoli che la perpendicolare al piano del circolo osculatore la sviluppoide fa col raggio di curvatura della trajettoria, e colla parpendicolare al piano osculatore la trajettoria stessa, e con b_2 l'angolo che formano fra loro i due raggi di curvatura si avranno dapprima le :

$$\cos.c_2 = \frac{\cos.a_3}{\cos.b_1}, \qquad \cos.c_3 = -\frac{\cos.a_2}{\cos.b_1}$$

dalle quali pei valori trovati per $\cos.a_2$, $\cos.b_1$;

$$\cos.c_2 = \frac{\cos.a_3}{\text{sen}.\omega}, \qquad \cos.c_3 = \frac{\text{d}}{t}\,\text{sen}.\omega.$$

Inoltre essendo :

$$\cos^2 a_3 + \cos.^2 b_3 + \cos.^2 c_3 = 1,$$

si ricaverà :

$$\cos.a_3 = \text{sen}.\omega \sqrt{\left(1 - \frac{\text{d}^2}{t^2}\,\text{sen}^2\omega\right)},$$

$$\cos.b_3 = -\cos\omega \sqrt{\left(1 - \frac{\text{d}^2}{t^2}\,\text{sen}^2\omega\right)}$$

e quindi

$$\cos.c_2 = \sqrt{\left(1 - \frac{\text{d}^2}{t^2}\,\text{sen}^2\omega\right)}.$$

Così dalla :

$$\cos^2 a_2 + \cos^2 b_2 + \cos^2 c_2 = 1$$

si ottiene :

$$\cos.b_2 = \frac{\text{d}}{t}\,\text{sen}\,\omega\cos\omega.$$

Le formole trovate sono utili nella ricerca dei valori

delle derivate degli angoli di prima e seconda flessione della trajettoria in funzione delle derivate dei medesimi angoli della sviluppoide. S'indichino con α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3, i coseni degli angoli che la tangente, il raggi o di curvatura, e l'asse del piano osculatore per la trajettoria fanno con tre assi ortogonali; con λ_1, μ_1, ν_1; λ_2, μ_2, ν_2; λ_3, μ_3, ν_3 i coseni degli angoli che le medesime tre rette per la sviluppoide comprendono con quegli assi. Si denomini γ l'angolo di contingenza della sviluppoide, δ l'angolo di torsione della trajettoria. Si avranno le equazioni :

$$\alpha_1 = \lambda_1 \cos a_1 + \lambda_2 \cos b_1 + \lambda_3 \cos c_1$$

$$\beta_1 = \mu_1 \cos a_1 + \mu_2 \cos b_1 + \mu_3 \cos c_1$$

$$\gamma_1 = \nu_1 \cos a_1 + \nu_2 \cos b_1 + \nu_3 \cos c_1$$

$$\alpha_3 = \lambda_1 \cos a_3 + \lambda_2 \cos b_3 + \lambda_3 \cos c_3$$

$$\beta_3 = \mu_1 \cos a_3 + \mu_2 \cos b_3 + \mu_3 \cos c_3$$

$$\gamma_3 = \nu_1 \cos a_3 + \nu_2 \cos b_3 + \nu_3 \cos c_3 .$$

Ora é noto essere :

$$\varphi'^2 = \alpha_1'^2 + \beta_1'^2 + \gamma_1'^2 , \qquad \delta'^2 = \alpha_3'^2 + \beta_3'^2 + \gamma_3'^2 ;$$

quindi derivando le equazioni superiori, quadrando i risultati, e sommando si avranno i valori richiesti. Se nell' eseguire queste operazioni si avrà riguardo alle relazioni :

$$\lambda_1 \lambda'_2 + \mu_1 \mu'_2 + \nu_1 \nu'_2 = \gamma' , \quad \lambda_2 \lambda'_1 + \mu_2 \mu'_1 + \nu_2 \nu'_1 = \gamma',$$

$$\lambda_1 \lambda'_3 + \mu_1 \mu'_3 + \nu_1 \nu'_3 = 0 , \quad \lambda_3 \lambda'_1 + \mu_3 \mu'_1 + \nu_3 \nu'_1 = 0,$$

$$\lambda_2 \lambda'_3 + \mu_2 \mu'_3 + \nu_2 \nu'_3 = \psi' , \quad \lambda_3 \lambda'_2 + \mu_3 \mu'_2 + \nu_3 \nu'_2 = -\psi',$$

$$\lambda'_1 \lambda'_2 + \mu'_1 \mu'_2 + \nu'_1 \nu'_2 = 0 ,$$

$$\lambda'_1 \lambda'_3 + \mu'_1 \mu'_3 + \nu'_1 \nu'_3 = \gamma' \psi' ,$$

$$\lambda'_2 \lambda'_3 + \mu'_2 \mu'_3 + \nu'_2 \nu'_3 = 0 ;$$

ed ai valori di $\cos a_1$, $\cos b_1 \ldots\ldots$, si otterranno le

$$\varphi'^2 = \gamma'^2 + \psi'^2 \operatorname{sen}^2\omega$$

$$\delta' = \frac{(d't - dt')\operatorname{san}\omega}{t\sqrt{(t^2 - d^2\operatorname{sen}^2\omega)}} - \frac{\sqrt{(t^2 - d^2\operatorname{sen}^2\omega)}}{td\operatorname{sen}\omega}\cos.\omega$$

che equivale alla:

$$\delta' = \frac{(\gamma'\psi'' - \gamma''\psi')\operatorname{sen}\omega}{\gamma'^2 + \psi'^2\operatorname{sen}^2\omega} + \psi'\cos\omega.$$

Si passa facilmente dall'una all'altra di queste due ultime equazioni osservando che le formole trovate danno:

$$\gamma' = \frac{\operatorname{sen}\omega}{t}, \qquad \psi' = -\frac{\sqrt{(t^2 - d^2.\operatorname{sen}^2\omega)}}{td\operatorname{sen}\omega}.$$

Il Lancret nella memoria citata aveva già dati i valori di φ' e di δ'; ma il secondo di essi differisce da quello ora trovato del termine $\psi'\cos\omega$. Allorquando $\omega = \frac{\pi}{2}$ le formole superiori si mutano nelle:

$$\varphi'^2 = \gamma'^2 + \psi'^2, \qquad \delta' = \frac{d't - dt'}{t\sqrt{(t^2 - d^2)}} = \frac{\gamma'\psi'' - \psi'\gamma''}{\gamma'^2 + \psi'^2}$$

La seconda di queste equazioni è integrabile e dà:

$$\delta + h = \operatorname{ang.sen}\frac{d}{t}$$

dalla quale:

$$t = \frac{d}{\operatorname{sen}(\delta + h)}$$

già trovata dal sig. Molins.

Rammentando le denominazioni adottate più sopra si hanno le equazioni:

$$\alpha^2_1 + \beta^2_1 + \gamma^2_1 = 1, \qquad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0,$$

$$\alpha^2_2 + \beta^2_2 + \gamma^2_2 = 1, \qquad \alpha_1\lambda_1 + \beta_1\mu_1 + \gamma_1\nu_1 = \cos.\omega,$$

$$\lambda^2_1 + \mu^2_1 + \nu^2_1 = 1, \qquad \alpha_2\lambda_1 + \beta_2\mu_1 + \gamma_2\nu_1 = \cos a_2.$$

Eliminando successivamente dalle ultime due le μ_1, ν_1, ricavando dalle risultanti i valori di ν_1, μ_1 in funzione di λ_1, e sostituendoli nella terza delle equazioni medesime, giungesi ad una equazione del secondo grado, la quale risolta avendo riguardo alle identità

$$\alpha^2_1 - \beta^2_2 - \gamma^2_2 = \alpha^2_2 - \beta^2_1 - \gamma^2_1 = -(\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2)^2$$

fornisce la:

$$\lambda_1 = \alpha_1 \cos\omega + \alpha_2 \cos. a_2 \pm (\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2)\sqrt{(\text{sen}^2\omega - \cos^2 a_2)}.$$

Analoghe espressioni si avranno per μ_1 e per ν_1. Sostituendo per α_1, α_2 ... $\cos a_2$ i loro valori si hanno le:

$$x = p - tp'\cos\omega + \text{d}^2 p''\text{sen}^2\omega$$
$$\pm \text{d sen}\omega(q''r' - q'r'')\sqrt{(t^2 - \text{d}^2\text{sen}^2\omega)}$$
$$y = q - tq'\cos\omega + \text{d}^2 q''\text{sen}^2\omega$$
$$\pm \text{d sen}\omega(r''p' - r'p'')\sqrt{(t^2 - \text{d}^2\text{sen}^2\omega)}$$
$$z = r - tr'\cos\omega + \text{d}^2 r''\text{sen}^2\omega$$
$$\pm \text{d sen}\omega(p''q' - p'q'')\sqrt{(t^2 - \text{d}^2\text{sen}^2\omega)}.$$

Da queste allorquando sarà conosciuto il valore di t in funzione di quantità spettanti alla trajettoria, data l'equazione della trajettoria si otterrà quella della sviluppoide. Un caso particolare in cui ciò si verifica é allorquando $\omega = \frac{\pi}{2}$ essendosi trovato $t = \frac{\text{d}}{\text{sen}(\delta + h)}$ e si avranno per le sviluppate di una linea qualunque le equazioni:

$$x = p + \text{d}^2 p'' \pm \text{d}^2 \text{cotang}(\delta + h)(q''r' - q'r'')$$
$$y = q + \text{d}^2 q'' \pm \text{d}^2 \text{cotang}(\delta + h)(r''p' - r'p'')$$
$$z = r + \text{d}^2 r'' \pm \text{d}^2 \text{cotang}(\delta + h)(p''q' - p'q'')$$

Se supponesi la sviluppante essere una linea piana sarà

$$r = 0, \quad \delta = 0,$$

e quindi:

$$x = p - \mathrm{d}q', \quad y = q + \mathrm{d}p', \quad z = \pm \mathrm{d} \text{ cotang}.h$$

le quali coincidono colle formole trovate da Fuss nel tomo III.° Anno 1811 delle « Memoires de l'Acadèmie Imperiale des Sciences de S. Petersbourg.

Nel caso che la sviluppante sia una linea sferica il valore di t assume un altra forma la quale ora veniamo a determinare. Per una linea sferica qualsivoglia hanno luogo come è noto le seguenti equazioni:

$$p = -\mathrm{d}\alpha_2 + \frac{\mathrm{d}'}{\delta'}\alpha_3; \quad q = -\mathrm{d}\beta_2 + \frac{\mathrm{d}'}{\delta'}\beta_3,$$

$$r = -\mathrm{d}\gamma_2 + \frac{\mathrm{d}'}{\delta'}\gamma_3.$$

Da queste quadrando e sommando, si ha indicando con a il raggio della sfera:

$$\mathrm{d}^2 + \frac{\mathrm{d}'^2}{\delta'^2} = a^2$$

che integrata dà:

$$\mathrm{d} = a \operatorname{sen}(\delta + k)$$

e quindi la:

$$\operatorname{sen}(\delta + h) = \frac{\mathrm{d}}{t}$$

fornisce pel valore di t:

$$t = \frac{a\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos l \mp \sqrt{(a^2 - \mathrm{d}^2)}\operatorname{sen} l}$$

dove $l = k - h$. Ora indicando con θ l'angolo che il raggio di curvatura della trajettoria fa col raggio della sfera dalle equazioni superiori deducesi:

$$\mathrm{d} = -a\cos\theta$$

per cui

$$t = \frac{a \cos \theta}{\cos (\theta \pm l)} .$$

Le medesime equazioni superiori moltiplicate ordinatamente per λ, μ, ν, e sommate, denominando u_1 l'angolo che il raggio della sfera fa colla tangente alla sviluppata danno :

$$a \cos u_1 = \frac{d^2}{t} + \sqrt{(a^2 - d^2)} \frac{\sqrt{(t^2 - d^2)}}{t}$$

nella quale sostituiti per t, d, i valori ultimi esposti si ha:

$$\cos u_1 = \cos (\pm l) ,$$

cioè l'angolo u_1 è costante. Ed analogamente chiamando u_2 , u_3 gli angoli che il raggio della sfera fa col raggio di curvatura, e colla perpendicolare al piano osculatore della sviluppata si otterrebbero le :

$$\cos u_2 = 0 , \qquad \cos u_3 = \text{sen} (\pm l)$$

Se l'angolo u_1 fosse retto si avrebbe :

$$t = \frac{ad}{\sqrt{(a^2 - d^2)}} .$$

la quale sviluppata particolare corrisponde alla sviluppata ordinaria delle linee piane.

Pavia li 15 agosto 1852.

SULLE LINEE TAUTOCRONE.

In risposta ad alcune osservazioni dirette dal sig.

G. BERTRAND AL COMPILATORE

NOTA

DEL SIG. F. BRIOSCHI

Una nota intorno le linee tautocrone da me pubblicata nel fascicolo di agosto 1852 di questi Annali, avendo richiamata l'attenzione del Sig. Prof. Bertrand sopra questo argomento, diede origine ad alcune osservazioni che il medesimo chiarissimo geometra diresse al Prof. Tortolini (*). La prima di tali osservazioni tende a provare che l' asserzione la quale trovasi in quella nota: essere noto al d'Alembert ed al Lagrange che supposta la forza composta di due termini, uno dei quali sia funzione della velocità, e l'altro dello spazio percorso; la formola di Lagrange non può dare la soluzione che nei casi già trattati dal Fontaine: è esatta solo per quella parte che si riferisce al d'Alembert. Ed a questo fine il prof. Bertrand dichiara, che il passo della seconda delle memorie di Lagrange sull' argomento, da me citato a convalidare quella asserzione, non si riferisce in nessun modo alla maggiore od alla minore generalità della formola di Lagrange, ma ha per unico scopo la critica del metodo di Fontaine.

Convengo che questo fosse lo scopo di Lagrange, tanto più che il passo citato leggesi nel capitolo intitolato « Remarques sur la solution des Tautochrones donnèe par M. Fontaine etc. » ma parmi che l'una questione comprenda l' altra. Infatti dietro quale ragionamento Lagrange dichiara « illusoire et fautive l'application que M. Fontaine pretend faire de ses equations au cas ou la force p seroit exprimèe

(*) Annali di Scienze Matemat. e Fisiche. Dicembre 1852.

par $\sigma + gu + hu^2 + ku^3$? Io non so rinvenirlo che alla fine della pag. 120 di detta memoria nelle parole « à cause que M. Fontaine suppose $\frac{d^2p}{dxdu} = 0$ ». Questa parte delle critica del metodo di Fontaine, unitamente al fatto d'essere la memoria del Lagrange posteriore a quella del d'Alembrt, inoltre quest' ultima memoria citata più volte dal Lagrange medesimo, avevanmi indotto ad asserire che l'osservazione del Sig. Bertrand non era sfuggita a Lagrange.

La seconda osservazione si riferisce ad un passo della dimostrazione della formola di Lagrange da me data in quella nota. Lo scopo di essa nota : dimostrare la formola di Lagrange : basterebbe a salvare quel passo ; pure è verissimo che non ho dichiarato esplicitamente che la detta formola, trovata con metodo qualsivoglia non può somministrare tutte le soluzioni del problema ; ma parmi evidente fosse tale la mia idea allorquando scrissi le parole « Però *a ben altri casi* può applicarsi la formola di Lagrange ec. » (pag. 364). E lo stesso passo della mia nota riprodotto dal sig. Bertrand riconferma questa asserzione; giacchè non dichiarai necessario l'annullarsi del numeratore della frazione, di cui l' integrale esteso fra i limiti zero ed α dà il valore di $\frac{dt}{d\alpha}$, perchè sia $\frac{dt}{d\alpha} = 0$ qualunque sia α.

Non erami però in allora suggerito alla mente come il metodo adottato nella ricerca della formola di Lagrange, poteva condurre ad una formola assai più generale, la quale presentandomisi occasione, vengo ad esporre. Ritenute le denominazioni usate nella nota citata se supponesi che il tempo t impiegato a percorrere l'arco α debba essere eguale ad una funzione individuata di α, cioè $t = \mu(\alpha)$ si avrà:

$$-\frac{1}{k}\int_0^\alpha \frac{\left[\psi''(z)z+\psi'(z)\right]k'v - \left[\frac{dv}{ds}\psi'(z)zk' + \frac{dv}{d\alpha}k\right]\psi'(z)}{v^3}\frac{dz}{ds}ds = \frac{d\mu}{d\alpha}$$

cioè dovrà essere:

$$(1) \qquad -\frac{1}{k}\int \frac{\left[\psi''(z)z+\psi'(z)\right]k'v - \left[\frac{dv}{ds}\psi'(z)zk'+\frac{dv}{d\alpha}k\right]\psi'(z)}{v^2}\frac{dz}{ds}ds$$

$$= \rho(s,\alpha)$$

essendo $\rho(s, \alpha)$ tale funzione da verificare la:

$$\rho(\alpha,\alpha) - \rho(0,\alpha) = \frac{d\mu}{d\alpha}$$

Derivando rispetto ad s l'equazione (1), ed operando sul risultato col metodo usato nella nota si ottiene la:

$$\varphi(s)\frac{dv}{ds} + \varphi(\alpha)\frac{dv}{d\alpha} - v\varphi'(s) - v^2\varphi(\alpha)\frac{d\rho}{ds} = 0,$$

la quale integrata dà:

$$(2) \qquad f(s) - f(\alpha) = \gamma\left(\frac{\varphi(s)}{v} + \varphi(\alpha)\,\rho(s,\alpha)\right)$$

essendo

$$\int\frac{1}{\varphi(s)}ds = f(s) \quad , \quad \int\frac{1}{\varphi(\alpha)}d\alpha = f(\alpha)$$

e γ il simbolo di una funzione arbitraria.

La (2) derivata rispetto ad s dà:

$$\frac{1}{\varphi(s)} = \gamma'\left(\theta(s,\alpha)\right)\left\{\frac{v\varphi'(s) - \frac{dv}{ds}\varphi(s)}{v^2} + \varphi(\alpha)\frac{d\rho}{ds}\right\}$$

posto per brevità

$$\theta(s,\alpha) = \frac{\varphi(s)}{v} + \varphi(\alpha)\,\rho(s,\alpha);$$

e questa moltiplicata per v^3, e divisa per $\varphi(s)$ conduce alla

$$p = v^2 \left[\frac{v}{\varphi(s)}\left(\frac{1}{\varphi(s)\gamma'(\theta(s,\alpha))} - \varphi(\alpha)\frac{d\rho}{ds}\right) - \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}\right]$$

chè è la formola cercata. Essa comprende il caso del tautocronismo allorquando suppongasi la funzione $\rho(s, \alpha)$ soddisfare all'equazione

$$\rho(\alpha, \alpha) = \rho(0, \alpha).$$

Riassumo dichiarandomi pienamente d'accordo col chiarissimo Sig. Bertrand avere il Lagrange attribuita troppa generalità alla sua formola, ed intendo anzi che il metodo di dimostrazione da me adottato nella ricerca di essa serva a convalidare questa opinione.

Pavia il 7 gennajo 1853.

SULLE LINEE TAUTOCRONE

OSSERVAZIONI AGGIUNTE ALL' ARTICOLO

DEL SIG. BERTRAND

Alle osservazioni del chiarissimo Sig. Bertrand, sulle linee tautocrone, pubblicate nel terzo volume di questi Annali pag. 547, aggiungiamo queste altre.

La formula data a pag. 367 detto volume, cioè

(1) $$v = \frac{1}{f'(s)} \lambda[f(s) - f(\alpha)]$$

non inchiude la condizione del tautocronismo; perchè fatti

$$f(s) - f(\alpha) = u, \quad \frac{1}{\lambda(u)} = \frac{dF(u)}{du},$$

abbiamo

(2) $$t = F(0) - F[f(0) - f(\alpha)]$$

che implica tutt'ora l' α.

Impiegando debitamente la differenziazione della funzione

soggette all'integrale porremo

$$t = -\int_\sigma^\alpha \varphi(s, \alpha).ds\,, \qquad \text{cioè} \qquad \frac{1}{v} = \varphi\,,$$

poi $s = \alpha.u$, onde

$$t = -\int_0^1 \alpha.\varphi(\alpha u, \alpha).du\,,$$

e col detto metodo troviamo a proposito

$$\varphi(s, \alpha) = \frac{\psi(u)}{\alpha u}\,:$$

ove ψ è funzione arbitraria, tale che $\dfrac{0}{\psi(0)} = 0$: ma quel risultato si prevede senza bisogno di calcolo.

La formula (1), porge il valore di t libero dall'integrale, può rendere $v = 0$ quando $s = \alpha$, e nulla dippiù. Pure i risultati particolari delle pag. 368, 369 sono esatti, e se Lagrange avesse dichiarata l'analisi che li ha inspirati, avressimo nella espressione il supplemento al difetto della formula (2); come vado a dire.

L' α può sparire dalla equazione (2), se $f(0)$ oppure $f(\alpha)$ è infinito, dippiù $F(0)$, $F(\infty)$ non sono infiniti, o nulli entrambi: condizioni alle quali possiamo soddisfare con molta latitudine. Poniamo per es.

$$f(s) = \frac{A.s^m + B}{(s - \alpha)^n}\,, \quad F(u) = \frac{E}{C + Du}\,;$$

dove $u = f(s) - f(0)$ A, B, C, D, E siano costanti, ed m, n positive: saranno

$$f(\alpha) = \infty\,, \quad F(\infty) = 0\,, \quad F(0) = \frac{E}{C}\,, \quad v(\alpha) = 0\,, \quad t = \frac{E}{C}$$

che sono tutte le richieste condizioni. X. Y.



SULLA CONVERGENZA DELLA SERIE INFINITA

$$(H-K\cos\beta)^{-\frac{\mu}{2}} = A_0 + 2A_1 \cos\beta + 2A_2 \cos 2\beta + \ldots \quad (1)$$

NOTA

DEL PROF. REMIGIO DEL GROSSO DI NAPOLI

Si sa che il coefficiente del termine $i+1$ di questa serie è dato dalla equazione

$$(2) \qquad A_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos i\beta \, d\beta}{(H - K\cos\beta)^{\frac{\mu}{2}}} \quad .$$

Inoltre essendo ciascuna delle funzioni trigonometriche $\cos\beta$, $\cos 2\beta$, $\cos 3\beta$, ... < 1, basterà dimostrare che, crescendo n verso l'infinito, converge ad un limite fisso la serie

$$S = A_0 + 2A_1 + 2A_2 + 2A_3 + \ldots + 2A_n$$

perchè resti dimostrata la convergenza della serie proposta. Ciò posto, si faccia

$$S' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(\cos\beta + \cos 2\beta + \cos 3\beta + \ldots + \cos n\beta)d\beta}{(H - K\cos\beta)^{\frac{\mu}{2}}}$$

$$W = \cos\beta + \cos 2\beta + \cos 3\beta + \ldots + \cos n\beta.$$

Moltiplicando quest'ultima equazione per $2\cos\beta$, e trasformando i termini del 2.° membro per mezzo della relazione

$$2\cos r\beta \cos\beta = \cos(r+1)\beta + \cos(r-1)\beta \,,$$

si avrà

$$2W\cos\beta = \cos2\beta + \cos3\beta + \cos4\beta + \ldots\ldots + \cos n\beta$$
$$+ \cos(n+1)\beta + 1 + \cos\beta + \cos2\beta + \ldots. + \cos(n-1)\beta$$

equazione che equivale a quest'ultima più semplice

$$2W\cos\beta = (1-\cos\beta) + 2W - (\cos n\beta - \cos(n+1)\beta.$$

Di qui risulta

$$(1+2W)(1-\cos\beta) = \cos n\beta - \cos(n+1)\beta\,,$$

e quindi

$$W = -\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\beta}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta}\,,$$

ponendo mente alle relazioni

$$1-\cos\beta = 2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\beta$$

$$\cos n\beta - \cos(n+1)\beta = 2\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta\,.$$

Sostituendo questo valore di W nella espressione di S', troveremo

$$S' = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\beta}{(H-K\cos\beta)^{\frac{\mu}{2}}} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta(H-K\cos\beta)^{\frac{\mu}{2}}}$$

Ma abbiamo per la (2)

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\beta}{(H-K\cos\beta)^{\frac{\mu}{2}}}\;;$$

onde sostituendo nella precedente equazione, avremo

$$S' = -\frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\beta d\beta}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta\,(H-K\cos\beta)^{\frac{\mu}{2}}}\,,$$

e conseguentemente

$$2S' + A_o = \frac{1}{\pi}\int_o^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\beta \, d\beta}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\beta (H - K\cos\beta)^{\frac{\mu}{2}}} .$$

E poichè $2S' + A = S$, essendo che

$$2S'_1 + A_o = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \frac{(1 + 2\cos\beta + 2\cos 2\beta + \ldots + 2\cos n\beta)d\beta}{(H - K\cos\beta)^{\frac{\mu}{2}}}$$

si avrà finalmente

$$S = \frac{1}{\pi}\int_o^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\beta \, d\beta}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\beta (H - K\cos\beta)^{\frac{\mu}{2}}} .$$

Poniamo adesso $n\beta = \theta$, ad avremo

$$\int_o^{\beta} \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\beta \, d\beta}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\beta (H - K\cos\beta)^{\frac{\mu}{2}}} = \int_o^{n\beta} \frac{\operatorname{sen}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\theta d\theta}{n \operatorname{sen}\frac{\theta}{2n}\left(H - K\cos\frac{\theta}{n}\right)^{\frac{\mu}{2}}}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_o^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\beta \, d\beta}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\beta (H - K\cos\beta)^{\frac{\mu}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_o^{2n\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\theta d\theta}{n \operatorname{sen}\frac{\theta}{2n}\left(H - K\cos\frac{\theta}{n}\right)^{\frac{\mu}{2}}} = S.$$

E poichè

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2n} = \frac{\theta}{2n} - \frac{1}{2.3}\,\frac{\theta^3}{2^3 n^3} + \ldots\ldots\ldots$$

la precedente equazione si trasformerà in

$$S=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{2n\pi}\frac{\operatorname{sen}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\theta d\theta}{\theta\left(1-\frac{\theta^{2}}{2.3.2^{2}n^{2}}+\ldots\right)\left(H-K\cos\frac{\theta}{n}\right)^{\frac{\mu}{2}}}.$$

Passando ai limiti, cioè ponendo $n=\infty$, si avrà

$$\lim: S=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\theta(H-K)^{\frac{\mu}{2}}}=\frac{2}{\pi(H-K)^{\frac{\mu}{2}}}\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\theta}.$$

Ma è già stato dimostrato che

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\theta}=\frac{\pi}{2};$$

onde si avrà facilmente

$$\lim: S=\frac{1}{(H-K)^{\frac{\mu}{2}}}.$$

Sia poi un caso particolare

$$H=a^{2}+a'^{2},\quad K=2aa',\quad \mu=1,$$

e si avrà

$$\lim: S=\frac{1}{\pm(a'-a)}.$$

Questo limite diventa $=\infty$ quando $a'=a$, ed un numero molto grande quando a' ed a differiscono per poco, e ciò ha luogo nelle orbite degli asteroidi. Laonde la serie (1) non può adoperarsi pel calcolo delle reciproche attrazioni di quelli fra questi corpi celesti, che descrivono orbite poco eccentriche di pochi gradi sul piano dell'ecclittica.



TEOREMA DI GEOMETRIA

DEL SIG. CAV. F. FAA' DI BRUNO
Capitano di stato maggiore in Torino.

» Il volume di un prisma tronco avente per base un po-
» ligono regolare d'un numero pari di lati è uguale al pro-
» dotto della base per la perpendicolare abbassata sulla me-
» desima dal punto O′, in cui l'asse del prisma incontra la
» base superiore ».

(S'intende asse del prisma la retta condotta dal centro del poligono parallelamente agli spigoli).

Dimostrazione. Per l'asse del prisma, e per i suoi diversi spigoli facciamo passare altrettanti piani. Questi divideranno il prisma in tanti prismi triangolari tronchi, quanti sono i lati del poligono regolare di base. Calcolando i volumi di questi prismi, e facendone la somma ne dedurremo il volume totale del prisma proposto.

Sia dunque V questo volume, n il numero dei lati del poligono regolare di base, n rappresentando un numero pari, B l'area della base, e p, a, b, c . . . l le perpendicolari abbassate dal punto O′, e dai vertici A′, B′, C′ della base superiore sul piano della base inferiore.

Il volume di uno qualunque dei prismi tronchi sarà espresso dal prodotto della propria base per il terzo della somma delle perpendicolari abbassate dai vertici della base opposta sul piano della prima. Ma tutte le basi di questi prismi triangolari essendo eguali, dietro l'ipotesi che il poligono della base sia regolare, ciascuna di esse sarà espressa da $\frac{B}{n}$ onde i volumi dei diversi prismi tronchi saranno espressi successivamente dai prodotti

(1) $$\frac{B}{n}\left(\frac{a+b+p}{3}\right)$$

(2) $$\frac{B}{n}\left(\frac{b+c+p}{3}\right)$$

(3) $$\frac{B}{n}\left(\frac{c+d+p}{3}\right)$$

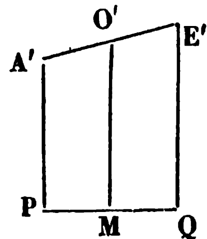
. . . .

(n) $$\frac{B}{n}\left(\frac{l+a+p}{3}\right)$$

Epperò facendone la somma, il volume totale sarà

$$V=\frac{B}{n}\left(\frac{np+2(a+b+c+..+l)}{3}\right).$$

Vediamo ora qual sia il valore di $a+b+c+....+l$. A tal fine supponiamo che a e e siano le perpendicolari abbassate dalle estremità della diagonale qualunque A'E' della base superiore corrispondente alla diagonale AE della base inferiore. Allora nel trapezio A'E'PQ formato dalla perpendicolari A'P, e E'Q dalla diagonale A'E', e dalla retta, che nel piano inferiore congiungerebbe i piedi delle perpendicolari, si avrà che la perpendicolare abbassata dal punto O'



$$=O'M=\frac{A'P+E'Q}{2}$$

ossia

$$p=\frac{a+c}{2}.$$

La stessa eosa avendo luogo per due altri vertici qualunque opposti si otterranno le seguenti eguaglianze

(1) $$2p = a + e$$

(2) $$2p = b + f$$

(3) $$2p = c + g$$

. . . . .

$\left(\frac{n}{2}\right)$ $$2p = h + l$$

in numero di $\frac{n}{2}$ perchè tale è appunto il numero delle diagonali. Sommandole troveremo che

$$a + b + c \ldots + l = np$$

epperciò sarà

$$V = Bp.$$

C. C. D. D.

Corollario. 1.° Il volume di un prisma tronco da due parti è eguale alla sezione retta moltiplicata per l'asse del prisma.

Corollario 2.° Il cilindro potendosi considerare come un prisma di un numero infinito doppio di lati, quanto si è detto pel prisma tronco avrà luogo eziandio pel cilindro tronco.

SULL' INFLUSSO DEL CALORE NELLA CONDUCIBILITA' DE' FILI METALLICI PER LE CORRENTI ELETTRICHE.

NOTA

DEL P. F. S. PROVENZALI D. C. D. C.

L'esperienze di reometria elettrica recentemente intraprese da parecchi fisici inducono a credere non essere del tutto esatta la legge delle lunghezze proposta da Ohm, cioé che i fili metallici omogenei oppongono alla corrente elettrica una resistenza proporzionale alla loro lunghezza. Fino dal 1847 il Sig. Marié-Davy (*) aveva accennato che la legge di Ohm non era sempre conforme all'esperienza, e che la conducibilità del filo metallico percorso da una corrente elettrica poteva essere alterata dal calore prodotto dalla corrente medesima. Più recentemente il P. Secchi per ispiegare i risultati che il Sig. Despretz ha ottenuti contro la legge di Ohm e Pouillet è ricorso all'aumento di resistenza prodotto dal calore nel filo percorso dalla corrente, come si può vedere nel fascicolo del giugno 1852 di questi Annali. Trattandosi di una legge che è fondamentale nella teoria elettro-dinamica, e che fino ad ora ha servito di norma in una infinità di esperienze, e di utili applicazioni, mi sono determinato di sottoporne di nuovo a rigoroso esame l'esattezza e le modificazioni che si stima necessario di farle subire onde conformarla coi fenomeni. Lo scopo di questa nota si è di far conoscere i risultati che credo avere ottenuti da alcune serie di esperienze, che ho intraprese su questo particolare, stimando che non riusciranno discari a chi si voglia occupare di somiglianti ricerche.

A fine di verificare se la legge della lunghezza sia o no

(1) Annales de Chi. et de Phys. 3.e Série T. XIX et XXII.

rigorosamente vera ho proceduto in questo modo. In un tubo di vetro piegato a foggia di U ho inserito circa un metro di filo di platino del diametro di $_1|_5$ di millimetro curvato ad elice, per averne sotto piccolo volume una quantità sufficiente. I due capi della spirale pescavano in due vaschette piene di mercurio, ove terminavano i reofori di una coppia alla Daniell a forza costante, ed un opportuno meccanismo rendeva facile l'immergere il tubo e la spirale in un bagno di cui regolava a piacere la temperatura. Faceva parte di questo circuito voltiano una sensibilissima bussola delle tangenti le indicazioni della quale projettate su di uno specchio, si leggevano in distanza coll'ajuto di un telescopio, che lasciava comodamente distinguere $^1|_8$ di grado. Per 48 ore continue ho fatto circolare la corrente per questo circuito, senza alterarne menomamente la disposizione, ed ho osservato che l'intensità della corrente rimaneva sensibilmente costante finchè non variava la temperatura del bagno in cui era immerso il tubo e la spirale di platino, ma variando questa di alcuni gradi, la bussola accusava tosto una mutazione nell'intensità della corrente. Queste vicissitudini d'intensità non si possono attribuire all' incostanza della pila, perchè sono in tal maniera connesse colle mutazioni di temperatura della spirale, che anche molte ore dopo che l'elettromotore era stato messo in azione, sostituendo un miscuglio frigorifico al bagno caldo, l'intensità della corrente immediatamente cambiava e cresceva fino a superare l'intensità iniziale, cioè l'intensità della corrente al principiare delle esperienze quando la temperatura della spirale era + 12° C. Nè sarebbe più conforme ai fatti l'attribuire queste alterazioni d'intensità alle correnti termo-elettriche, che si potrebbero destare nel circuito al variare la temperatura della spirale, giacchè se la cosa passasse così, sottraendo l' elettromotore dal circuito, e continuando a variare la temperatura della spirale, la bussola proseguirebbe a indicare la presenza della

corrente termo-elettrica, ma ciò non succede; e sebbene dopo tolta la pila dal circuito abbia elevata più volte la temperatura della spirale fino all'incandescenza del vetro che la vestiva, e quindi abbassatala rapidamente immergendola in un miscuglio frigorifico, non mi è mai riuscito di osservare nell' ago della bussola deviazione di sorte. Credo pertanto, che dietro i principii già noti della scienza non si possano spiegare le surriferite alterazioni d'intensità nelle correnti, se non si ammetta, che il calore altera la resistenza de'conduttori, vale a dire, se non si ammetta che la legge delle lunghezze non è esatta, mentre si sa, che a parità di circostanze il filo lungo è dalla corrente riscaldato meno del filo corto.

Assai più difficile si è il determinare la legge con cui procede l'alterazione nella resistenza che soffre un filo in virtù dell'innalzamento di temperatura prodotto dalla corrente. Non ho lasciato di adoperare tutta la diligenza per diffondere qualche luce su questo punto, tanto necessario per istabilir le modificazioni da introdursi nella legge di Ohm. Usando dell'apparato descritto di sopra, ho fatto variare gradatamente la temperatura del bagno dove pescava la spirale di platino dallo zero fino all'ebollizione dell'acqua, notando di 5 in 5 gradi le indicazioni della bussola sì nell' alzarsi come nell'abbassarsi della temperatura. Questa esperienza l'ho ripetuta più volte mutando i limiti delle variazioni di temperatura da 10 sotto allo zero fino all'ebollizione dell'olio, del mercurio ed all'incandescenza del vetro, senza omettere mai di osservare la bussola quando il termometro immerso nel bagno marcava gli stessi gradi tanto nel crescere, come nello scemare della temperatura, e ciò per eludere la difficoltà che potrebbe far nascere qualunque incertezza si voglia supporre sulla costanza dell' elettromotore, come anche per correggere in qualche modo gli errori di osservazione col prendere per ogni grado la media di due osservazioni

della bussola. Determinate così le differenti deviazioni dell'ago per 6, o 7 temperature notabilmente diverse, sono passato a cercare per mezzo di un reostato dl Wheatstone la lunghezza del filo, che si doveva aggiungere o togliere al circuito dopo ciascuna deviazione dell'ago per ricondurlo al suo stato normale, cioé al punto a cui si fermava quando la temperatura della spirale era 12° C. La lungezza del filo aggiunto o sottratto al circuito in ciascuna esperienza è stata sempre ridotta alla lunghezza equivalente di un filo di rame del diametro di circa un millimetro. Un metro di questo filo scelto per unità di misura pesava 8 grammi. La lunghezza ridotta della spirale di platino era 19^m, 44, e la lunghezza misurata della porzione sottoposta ai cangiamenti di temperatura 0^m, 38.

La tavola seguente offre la media dell'esperienze che ho fatte nell'intervallo di 48 ore.

Temperatura	Deviazione osservata	Differenza dalla deviazione normale	Filo aggiunto (+) o sottratto (—) al circuito
+ 12°C	63°,	0°	0^m, 0^c
— 10°	63°,2	— 0,2	+ 0, 19
+ 63°	67°,4	+ 0,6	— 0, 65
100°	67°,2	0,8	1, 22
150°	66°,7	1,3	1, 50
350°	64°,9	3,1	3, 94
580°	63°,1	4,9	5, 70

Colle temperature 350° e 580° ho voluto denotare l'ebollizione del mercurio e l'incandescenza del vetro. Ritornando su queste esperienze ad ottenere e indicare le alte temperature mi varrò della fusione di alcuni metalli, racchiusi entro

tubi di vetro o porcellana. La differenza che certamente si osserverà nella intensità della corrente fatta passare per quei metalli prima e dopo la loro fusione potrà forse condurre a qualche altro fatto di non leggiera importanza.

Se la tavola che mostra i risultati delle mie ricerche fosse una precisa espressione de'fatti (ciò che non oso di asserire per la somma delicatezza dell'esperienze alle quali è appoggiata) si potrebbe conchiudere, che la resistenza de' fili cresce molto prossimamente in ragione diretta del calore eccitato dalla corrente, per forma che alla variazione di un grado nella temperatura del filo corrisponde una variazione di resistenza uguale a quella che oppone un filo di rame del diametro di un millimetro, e di circa un centimetro di lunghezza. Ma prima di ammettere una siffatta modificazione alla legge di Ohm è necessario ricorrere anche più di una volta all'esperienza variandone in tutti i modi le circostanze.

Credo dunque di aver provato che la temperatura esercita una influenza che non si può trascurare sulla conducibilità de'fili metallici percorsi dalla corrente, e per conseguenza che la legge di Ohm non è del tutto esatta. Ma rimetto ad ulteriori ricerche il decidere se la modificazione che ne ho proposta sia quella o unicamente quella che esige la natura de'fatti.

SUI TERREMOTI

NOTA

DEL SIG. FRANCESCO PISTOLESI

In una Nota pubblicata l'anno 1842 indicai che i N.[i] 2315 di giorni con terremoto da me appuntati e distribuiti per mesi, davano fra i mesi freddi (ottobre a tutto marzo) e i mesi caldi (Aprile a tutto settembre) il rapporto come 1 a 0,88 (*N. Ann. delle Sc. natur. di Bologna* Tom. 8°).

Nel 1851, sopra N.° 7976 giorni con terremoto a tutto il 1846, ebbi il rapporto di 1 a 0,87 (*An. di Scienze Mat. e Fis. di Roma febbraio* 1851).

Ora avendo a tutto il 1850 N.° 9358 giorni con terremoto, distribuiti come appresso:

VERNO				AUTUNNO			
Gennajo	N.°	853		Ottobre	N.°	846	
Febbrajo	»	891		Novembre	»	872	
Marzo	»	848		Dicembre	»	717	
		2592	+			2385	= 4977

PRIMAVERA				ESTATE			
Aprile	N.°	763		Luglio	N.°	709	
Maggio	»	739		Agosto	»	742	
Giugno	»	751		Settembre	»	677	
		2253	+			2128	= 4381

vi trovo conservato il medesimo rapporto di 1 a 0,88 di frequenza fra i mesi freddi e i mesi caldi.

Parimente, come nella seconda delle due precedenti note

sommai i giorni di terremoto dei due mesi dell'equinozio, e quelli dei due mesi del solstizio, così farò lo stesso circa i nuovi numeri ottenuti.

MESI DELL'EQUINOZIO.

Marzo . . .	N.° 848
Settembre . . .	» 677
	N.° 1525

MESI DEL SOLSTIZIO.

Giugno . . .	N.° 751
Dicembre . . .	» 717
	N.° 1468

La differenza 57 fra le dette due somme è pure insignificante, come era la precedente di 52.

Questi resultati confermano perciò quanto già enunciavo, cioè che il sole non influisce *cosmicamente* sulla produzione dei terremoti, ma vi influisce *termicamente*.

Pisa li 12 gennajo 1853.

SOPRA L'ABBASSAMENTO DELLE EQUAZIONI MODULARI DELLE FUNZIONI ELLITTICHE.

MEMORIA

DEL PROF. ENRICO BETTI

1.° È noto che la equazione algebrica

$$(1)\qquad F(x)=0,$$

la quale serve a determinare sen am $\frac{\omega}{p^2}$ quando

$$\frac{\omega}{4}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-k^2x^2)]}},$$

e p è un numero primo qualunque, ha p^2-1 radici comprese nella espressione

$$(2)\qquad x_{m\,n}=\text{sen am}\left(\frac{m\omega+n\tilde{\omega}i}{p}\right),$$

dove m e n sono numeri interi qualunque $<p$, che possono essere separatamente eguali a zero, $i=\sqrt{-1}$, e

$$\frac{\tilde{\omega}}{4}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-(1-k^2)x^2)]}}.$$

Construiamo una funzione razionale delle p^2-1 radici (2), che muti valore per qualunque sostituzione si faccia sulle medesime. Sia questa

$$(3)\left\{\begin{array}{l}U=f\Big(x_{0,1}\;\; x_{0,2}\,\ldots\, x_{0,p-1}\;\; x_{1,0}\;\; x_{1,2}\,\ldots\, x_{1,p-1}\,\ldots \\ \qquad\qquad x_{p-1,0}\,\ldots\ldots\, x_{p-1,p-1}\Big).\end{array}\right.$$

Dalle formule dell'addizione e della moltiplicazione delle amplitudini, abbiamo

$$
(4)\left\{\begin{aligned} & x_{m,n} \\ = & \frac{\text{sen am}\frac{m\omega}{p}\cos\text{am}\frac{n\tilde{\omega}i}{p}\,\Delta\,\text{am}\frac{n\tilde{\omega}i}{p}+\text{sen am}\frac{n\tilde{\omega}i}{p}\cos\text{am}\frac{m\omega}{p}\,\Delta\,\text{am}\frac{m\omega}{p}}{1-k^2\text{sen}^2\text{am}\frac{m\omega}{p}\,\text{sen}^2\,\text{am}\frac{n\tilde{\omega}i}{p}}, \end{aligned}\right.
$$

e qualunque sia α, indicando con ψ_1 ψ_2 .... funzioni razionali, se q è pari

$$
(5)\left\{\begin{aligned} & \text{sen am}q\alpha = \text{sen am}\,\alpha\cos\text{am}\,\alpha\,\Delta\,\text{am}\,\alpha\,\psi_1(\text{sen}^2\text{am}\,\alpha) \\ & \cos\text{am}\,q\alpha = \psi_2(\text{sen}^2\text{am}\,\alpha) \\ & \Delta\,\text{am}\,q\alpha = \psi_3(\text{sen}^2\text{am}\,\alpha). \end{aligned}\right.
$$

e se q è dispari

$$
(6)\left\{\begin{aligned} & \text{sen am}q\alpha = \text{sen am}\,\alpha\,\psi'(\text{sen}^2\text{am}\alpha) \\ & \cos\text{am}q\alpha = \cos\text{am}\,\alpha\psi''(\text{sen am}\,\alpha) \\ & \Delta\,\text{am}q\alpha = \Delta\,\text{am}\,\alpha\,\psi'''(\text{sen}^2\text{am}\,\alpha) \end{aligned}\right.
$$

Quando $\alpha = \frac{\omega}{p}$, $= \frac{\tilde{\omega}i}{p}$, osservando che $p+1$ è pari, si ricava dalla 2^a e dalla 3^a delle (5)

$$
(7)\left\{\begin{aligned} & \cos\text{am}\,\alpha = \cos\text{am}\,(p+1)\alpha = \psi_2\,(\text{sen}^2\text{am}\,\alpha) \\ & \Delta\,\text{am}\,\alpha = \Delta\,\text{am}\,(p+1)\alpha = \psi_3\,(\text{sen}^2\text{am}\,\alpha). \end{aligned}\right.
$$

Sostituendo i valori (7) nei secondi membri delle (5) e delle (6), questi diverranno tutti funzioni razionali di sen am α, e quindi, applicando quelle formule alla riduzione della (4), si avrà $x_{m,n}$ dato da una funzione razionale di sen am $\frac{\omega}{p}$ e di sen am $\frac{\tilde{\omega}i}{p}$, qualunque siano i numeri intieri m ed n. Dunque il secondo membro della (3) potrà esprimersi per una fun-

zione razionale φ delle medesime quantità, cioè

$$(8)\qquad U=\varphi\left(\operatorname{sen am}\frac{\omega}{p},\ \operatorname{sen am}\frac{\tilde\omega i}{p}\right).$$

Il prodotto

$$(9)\qquad \Omega=\Pi\varphi\left[\operatorname{sen am}\left(\frac{a\omega+b\tilde\omega i}{p}\right),\ \operatorname{sen am}\left(\frac{a'\omega+b'\tilde\omega i}{p}\right)\right],$$

esteso a tutte le combinazioni dei valori interi di a, b, a' e $b'<p$, sarà evidentemente una funzione razionale e simmetrica delle radici della (1), e quindi razionale dei coefficienti della medesima.

I fattori di Ω sono eguali ai valori che prende U quando nella (3) si pongono $\frac{a\omega+b\tilde\omega i}{p}$ e $\frac{a'\omega+b'\tilde\omega i}{p}$ rispettivamente in luogo di $\frac{\omega}{p}$ e di $\frac{\tilde\omega i}{p}$, e che corrispondono alle permutazioni delle radici che si ottengono nella medesima (3) colle sostituzioni

$$(10)\qquad \left\{\begin{matrix} x_{m,n} \\ x_{am+a'n,\ bm+b'n} \end{matrix}\right\}.$$

Dunque Ω è una funzione razionale delle radici della (1), invariabile soltanto per le sostituzioni (10), ed è razionale dei coefficienti, quindi il gruppo G della (1) avrà tutte le sue sostituzioni comprese nel simbolo (10) (*).

Una qualunque delle sostituzioni (10) cangia contemporaneamente

$$x_{m,n} \text{ in } x_{am+a'n,\ bm+b'n}=x_{m',n'},$$

$$x_{hm,hn} \text{ in } x_{h(am+a'n),\ h(bm+b'n)}=x_{hm',hn'};$$

(*) Vedi negli *Annali di Scienze Mat. e Fis. T. III. Feb. e Marzo* 1852, la mia Memoria *sulla risoluzione delle equazioni*. Parte II. n. 6.

e questo avviene per i $p-1$ valori di $h<p$: dunque le $p-1$ lettere, gl'indici delle quali hanno i loro rapporti geometrici congrui rispetto al modulo p, dalle sostituzioni di G o sono permutate tra loro, o in altre che hanno anch' esse tutte quante congrui, i rapporti dei loro indici, e quindi il gruppo G é a lettere congiunte, i sistemi di queste sono $p+1$ e ciascuno è composto di $p-1$ lettere.

Indicando con q un numero qualunque $<p$, i tipi delle lettere dei $p+1$ sistemi saranno

$$(11)\qquad x_{q,0}\quad x_{q,q}\quad x_{q,2q}\ldots x_{q,(p-1)q}\quad x_{0,q}\ ,$$

o anche ponendo

$$x_{q,iq}=y_{q,i}\ ,$$

$$(12)\qquad y_{q,0}\quad y_{q,1}\quad y_{q,2}\ldots y_{q,p-1}\quad y_{q,\frac{1}{0}}\ ;$$

e le (10) eseguite sulle (12) diverranno della forma

$$(13)\qquad \left|\begin{matrix} y_{q,i} \\ y_{\rho q,\frac{ai+b}{a'i+b'}}\end{matrix}\right|,$$

poichè

$$x_{a'qi+b'q',\,aqi+bq}=y_{(a'+b'i)q,\frac{ai+b}{a'i+b'}}\ .$$

Da ciò è facile dedurre

$$(14)\qquad G=HK,$$

rappresentando con H un gruppo le sostituzioni del quale sono date da

$$(15)\qquad \left\{\begin{matrix} y_{q,i} \\ y_{\rho q,i}\end{matrix}\right\},$$

e K essendo un altro gruppo che ha le sue sostituzioni comprese nella espressione

$$(16) \qquad \left\{ \begin{matrix} y_{q,\,i} \\ \\ y_{q,\,\frac{ai+b}{a'i+b'}} \end{matrix} \right\}.$$

Il gruppo H è il prodotto di altri tutti di prima classe, poichè tutte le sue sostituzioni (15) sono potenze della unica nella quale ρ è radice primitiva di p (*).

Pertanto la (1) che ha per gruppo G sarà riduttibile in $p+1$ fattori di grado $p-1$, e razionali quando siano aggiunte le radici di una sola equazione di grado $p+1$, il gruppo della quale sia K, e le equazioni che nascono ponendo a zero questi fattori avranno per gruppo H, e quindi saranno tutte risolubili per radicali (**), come già dimostrò l' *Abel* (***).

3.° La equazione di grado $p+1$ e di gruppo K, dalla quale dipende la risoluzione della (1), può avere per radici quali si vogliano funzioni razionali delle radici della (1), basta solo che siano invariabili per le sostituzioni (15) e variabili per le (16) : dunque potrà essere la equazione modulare che serve alla trasformazione dell' ordine p^{esimo}, la quale ha le sue $p+1$ radici della forma

$$(17) \quad \lambda_t = k^p \Pi \left\{ \frac{\cos \operatorname{am} q\left(\frac{\omega+t\bar{\omega}i}{p}\right)}{\Delta \operatorname{am} q\left(\frac{\omega+t\bar{\omega}i}{p}\right)} \right\}^4 = k^p \Pi \left\{ \psi \left[\operatorname{sen} \operatorname{am} q\left(\frac{\omega+t\bar{\omega}i}{p}\right) \right] \right\}^4$$

(*) Vedi la mia Memoria sulla risoluzione delle equazioni. Parte I. num. 35.

(**) Vedi ivi Parte II. num. 18, 2.

(***) Vedi Abel Oeuvres completes. T. I. XII.

Il prodotto Π deve essere esteso ai $\frac{p-1}{2}$ valori di q non $> \frac{p-1}{2}$, ψ è una funzione razionale come si deduce dalle (5), (6) e (7), e t ha i $p+1$ valori

$$(18) \qquad 0, 1, 2, 3, \ldots, p-1, \frac{1}{0} \quad (*).$$

Con questi numeri rappresenteremo per brevità le radici stesse (17), e le sostituzioni (16) del gruppo K diverranno

$$(19) \qquad \left\{ \begin{matrix} t \\ \frac{at+b}{a't+b'} \end{matrix} \right\}$$

Non per tutte le combinazioni dei valori di a, b, a' e b' si hanno dalla (19) sostituzioni effettive o *reali*. Quando due o più radici sono convertite in una medesima radice, la sostituzione che dà una tale permutazione è assurda, e la diremo *immaginaria*, sia

$$\left\{ \begin{matrix} t \\ \frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta} \end{matrix} \right\}$$

una delle (19) immaginaria, e siano t e t' le due radici che rimangono convertite in una stessa radice; avremo

$$\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta} \equiv \frac{\alpha t'+\beta}{\gamma t'+\delta} \pmod{p},$$

e quindi

$$(\alpha\delta-\beta\gamma)(t-t') \equiv 0 :$$

congruenza che è sodisfatta soltanto quando il determinante

$$D = \alpha\delta-\beta\gamma \equiv 0$$

(*) Vedi C. G. J. Jacobi, Fundamenta nova functionum ellipticarum, num. 21 e 24.

oppure

$$t \equiv t'$$

Dunque sostituzioni immaginarie sono soltanto quelle, il determinante delle quali è congruo a zero rispetto al modulo p (*).

(*) Questa proprietà è generale per tutte le sostituzioni sopra p^{ν} 1— lettere, della forma

$$(a) \quad \left\{ \begin{matrix} x_{m,n,\dots r} \\ \\ x_{a'm+b'n+\cdots+h'r,\ a''m+b''n+\cdots+h''r,\ \cdots\ a^{(\nu)}m+b^{(\nu)}n+\cdots+h^{(\nu)}r} \end{matrix} \right\};$$

dove si riguardino al solito eguali gl'indici congrui rispetto al modulo p.

Affinchè due sistemi d'indici differenti $m, n, \dots r$; $m', n', \dots r'$ siano convertiti in uno stesso sistema è necessario e sufficiente che siano verificate le congruenze

$$a'm + b'n + \dots + h'r \equiv a'm' + b'n' + \dots + h'r'$$
$$a''m + b''n + \dots + h''r \equiv a''m' + b''n' + \dots h''r'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^{(\nu)} m + b^{(\nu)} n + \dots + h^{(\nu)} r \equiv a^{(\nu)} m' + b^{(\nu)} n' + \dots h^{(\nu)} r'$$

ossia

$$a'(m - m') + b'(n - n') + \dots + h'(r - r') \equiv 0$$
$$a''(m - m') + b''(n - n') + \dots + h''(r - r') \equiv 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^{(\nu)} (m - m') + b^{(\nu)} (n - n') + \dots + h^{(\nu)} (r - r') \equiv 0.$$

Ora questo sistema di congruenze non può esser soddisfatto a meno che non sia il determinante

$$D = \left\{ \begin{matrix} a'b' \dots h \\ a''b'' \dots h'' \\ \dots\dots\dots \\ a^{(\nu)}\, b^{(\nu)} \dots h^{(\nu)} \end{matrix} \right\} \equiv 0$$

Le (19) possono ridursi ai tre tipi seguenti:

$$(20)\ \left\{\begin{matrix} t \\ at+b \end{matrix}\right\}, \qquad (21)\ \left\{\begin{matrix} t \\ \dfrac{1}{at+b} \end{matrix}\right\}, \qquad (22)\ \left\{\begin{matrix} t \\ \dfrac{at+b}{t+b'} \end{matrix}\right\}.$$

La (20) e la (21) sono sempre reali, e danno $p(p-1)$ sostituzioni ciascuna; la (22) contiene $p^2(p-1)$ sostituzioni, poichè a può avere $p-1$ valori differenti, e p ne possono avere b e b'; ma $p(p-1)$ di queste sono immaginarie, altrettante essendo le combinazioni dei valori di a, b e b' per le quali è soddisfatta la congruenza

$$D \equiv ab' - b \equiv 0.$$

In conseguenza la totalità delle sostituzioni (19) sarà di

$$p(p-1)(p+1),$$

e questo sarà il grado del gruppo K della equazion modulare.

Poniamo

$$\theta = \left\{\begin{matrix} i \\ \dfrac{ai+b}{a'i+b'} \end{matrix}\right\} \qquad \psi = \left\{\begin{matrix} i \\ \dfrac{\alpha i+\beta}{\alpha' i+\beta'} \end{matrix}\right\}$$

$$D = ab' - a'b \qquad D' = \alpha\beta' - \alpha'\beta,$$

e conveniamo con *Legendre*, $\left(\frac{m}{p}\right) = 1$ significhi che m è residuo quadratico di p, $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$, che n non è residuo di p. Facendo il prodotto delle due sostituzioni, avremo

---

oppure

$$m \equiv m', \ n \equiv n' \ldots r \equiv r',$$

Dunque *è necessario e sufficiente, affinchè una sostituzione* (a) *sia immaginaria, che il suo determinante sia congruo a zero rispetto al modulo p.*

$$\theta\psi = \left\{ i \atop \frac{a_1 i + b_1}{a'_1 i + b'_1} \right\}$$

dove

$$a_1 = a\alpha + a'\beta\,, \qquad b_1 = b\alpha + b'\beta\,,$$

$$a'_1 = a\alpha' + a'\beta'\,, \quad b'_1 = ba' + b'\beta'\,,$$

e il determinante

$$\Delta = a_1 b'_1 - a'_1 b_1 = \mathrm{DD}';$$

quindi se

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{p}\right) = \left(\frac{\mathrm{D}'}{p}\right)\,, \text{ sarà } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = 1\,,$$

e se

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{p}\right) = -\left(\frac{\mathrm{D}'}{p}\right) \qquad \left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1\,.$$

Da ciò ne segue che, quando

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{p}\right) = 1 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\mathrm{D}'}{p}\right) = -1$$

la derivata θ_1 di θ per mezzo di ψ avrà anch'essa il determinante D_1 residuo, poiché, essendo

$$\theta\psi = \psi\theta_1$$

sarà

$$\left(\frac{\mathrm{D}}{p}\right)\left(\frac{\mathrm{D}'}{p}\right) = \left(\frac{\mathrm{D}'}{p}\right)\left(\frac{\mathrm{D}_1}{p}\right) = -1$$

e quindi

$$\left(\frac{\mathrm{D}_1}{p}\right) = 1\,.$$

Dunque se si deriva per mezzo di una sostituzione, il determinante della quale è non residuo di p, un gruppo M formato con tutte le (19) reali che hanno il determinante re-

siduo, e che sarà di grado $\frac{p(p-1)(p+1)}{2}$, si avrà un derivato eguale al primitivo: e quindi

$$(23) \qquad K = MN.$$

indicando con N il gruppo delle due permutazioni, la cui sostituzione differente dall'unità ha il determinante non residuo di p (*).

Quando $p+1$ è il prodotto di fattori primi differenti, il gruppo M è primo, perchè altrimenti dovrebbe essere a lettere congiunte, e quindi il suo grado divisore di $1, 2 \ldots \alpha . 1.2.3 \ldots \beta$ essendo $\alpha\beta = p+1$; il che è impossibile, contenendo nel suo grado il fattore primo $p > \alpha$ e $> \beta$ (**). D'altronde $p+1$ ha sempre dei fattori primi differenti, a meno che non sia eguale a una potenza di 2, poiche altrimenti p sarebbe un numero pari e quindi o non primo o eguale a due.

4.° Se il gruppo M non si può decomporre in gruppi di prima classe, è però la somma di p gruppi derivati simili nei casi determinati dal seguente.

Teorema. *Allorchè le potenze dispari* $< p-2$ *di una radice primitiva* g *del numero primo* $p = 4n+3$, *per la quale* $\left(\frac{g-1}{p}\right) = 1$, *soddisfanno o l' una o l' altra delle due congruenze*

$$(24) \qquad g^2x^2 - g(g+1)x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$(25) \qquad g^2x^2 - (g+1)x + 1 \equiv 0,$$

(*) Prendo questa occasione per notare la inconvenienza della trasformazione in indici frazionari, che ho fatta nella mia Memoria *Sulla risoluzione delle equazioni* Parte I. num. 38 per dimostrare questa decomposizione nel caso generale: la dimostrazione rimane la stessa, mantenendo gl'indici interi.

(**) Vedi la Memoria più volte citata. Parte I. §. III.

il gruppo M *è la somma di p gruppi derivati simili a lettere congiunte.*

Sia g^{2i+1} una radice della (24), sostituendo e riducendo, avremo

(26) $$g^2(g^{2i+1}-1)^2+g(g-1)(g^{2i+1}-1)-g+1\equiv 0.$$

Ora è facile verificare le due identità

(27) $$(g^{2i+2}-1)^2=g^2(g^{2i+1}-1)^2+2g(g-1)(g^{2i+1}-1)+(g-1)^2$$

(28) $$(g^{2i+3}-1)(g^{2i+1}-1)=g^2(g^{2i+1}-1)^2+(g^2-1)(g^{2i+1}-1)$$

Sottraendo la (27) dalla (28) moltiplicata per g, si ha

$$g(g^{2i+3}-1)(g^{2i+1}-1)-(g^{2i+2}-1)^2$$

$$=(g-1)\left(g^2(g^{2i+1}-1)^2+g(g-1)(g^{2i+1}-1)-g+1\right)\equiv 0,$$

onde

(29) $$g\,\frac{g^{2i+3}-1}{g^{2i+2}-1}\equiv\frac{g^{2i+2}-1}{g^{2i+1}-1}\,.$$

Dalla (26) si ricava anche

$$g(g^{2i+1}-1)(g^{2i+2}-1)\equiv g-1$$

la quale poichè $\left(\frac{g-1}{p}\right)=1$, dà

$$\left(\frac{g^{2i+2}-1}{p}\right)=-\left(\frac{g^{2i+1}-1}{p}\right):$$

e quindi

(30) $$\frac{g^{2i+2}-1}{g^{2i+1}-1}\equiv g^{2\gamma+1}\,;$$

dove γ è un intero $<\frac{p-1}{2}$; e dalle (29) e (30)

(31) $$\frac{g^{2i+3}-1}{g^{2i+2}-1}\equiv g^{2\gamma}\,.$$

Se g^{2t+1} è una radice della (25), sostituendo si ha

(32) $g^2(g^{2t+1}-1)^2+(2g+1)(g-1)(g^{2t+1}-1)+g(g-1)\equiv 0$

e sottraendo la (27) moltiplicata per g dalla (28)

$$(g^{2t+3}-1)(g^{2t+1}-1)-g(g^{2t+2}-1)^2$$

$$\equiv(1-g)\Big(g^2(g^{2t+1}-1)^2+(2g+1)(g-1)(g^{2t+1}-1)+g(g-1)\Big)\equiv 0$$

onde

(33) $$\frac{g^{2t+3}-1}{g^{2t+2}-1}\equiv g\,\frac{g^{2t+2}-1}{g^{2t+1}-1}\ .$$

Dalla (25) si rileva

$$g^{2t+2}(g^{2t+2}-1)\equiv g^{2t+1}-1\ ,$$

e quindi

$$\left(\frac{g^{2t+2}-1}{p}\right)=\left(\frac{g^{2t+1}-1}{p}\right)$$

che dà

(34) $$\frac{g^{2t+2}-1}{g^{2t+1}-1}\equiv g^{2\gamma}\ .$$

e sostituendo nella (33)

(35) $$\frac{g^{2t+3}-1}{g^{2t+2}-1}\equiv g^{2\gamma+1}\ .$$

Le sostituzioni

(36) $$\left\{\begin{matrix} i \\ g^{2\delta}\dfrac{i-g^{2\alpha+1}}{i-g^{2\alpha}}\end{matrix}\right\},\qquad (37)\quad \left\{\begin{matrix} i \\ g^{2\delta+1}\ \dfrac{i-g^{2\alpha}}{i-g^{2\alpha+1}}\end{matrix}\right\}$$

appartengono al gruppo M, poichè i loro rispettivi determinanti

$$g^{2(\delta+\alpha)}(g-1)\ ,\qquad g^{2(\delta+\alpha)+1}(1-g)$$

sono ambedue residui quadratici di p, essendo

$$\left(\frac{g-1}{p}\right)=-\left(\frac{1-g}{p}\right)$$

quando p è della forma $4n+3$, e perciò $\left(\frac{1}{p}\right)=-1$.

Valendosi della notazione di *Cauchy*, adottata anche dal *Serret*, si può porre la (36) sotto la forma

$$\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & g^2 & g^3 \ldots\ldots & g^{2\alpha} & g^{2\alpha+1} & \ldots\ldots g^{p-1} & g \\ g^{2\delta+1} & g^{2\delta} & g^{\mu_1} & g^{\nu_1} & \infty & 0 & g^{\mu_t} & g^{\nu_t} \end{matrix}\right\}$$

dove $t=\frac{p-1}{2}$, e

$$g^{\mu_\beta}\equiv g^{2\delta}\frac{g^{2(\alpha-\beta)+1}-1}{g^{2(\alpha-\beta)}-1}=g^{2\delta}\frac{g^{2(\beta-\alpha)-1}-1}{g^{2(\beta-\alpha)}-1}$$

$$g^{\nu_\beta}\equiv g^{2\delta}\frac{g^{2(\alpha-\beta)}-1}{g^{2(\alpha-\beta)-1}-1}=g^{2\delta}\frac{g^{2(\beta-\alpha)}-1}{g^{2(\beta-\alpha)+1}-1}.$$

Se prendiamo il 1.° dei due valori di g^{μ_β} e di g^{ν_β} quando $\beta<\alpha$, e il 2.° quando $\beta>\alpha$, il massimo valore del più piccolo dei tre esponenti di g formati colla differenza di α e di β, che ivi compariscono, sarà $p-3$, perchè $\frac{p-1}{2}$ è il più gran valore che possono avere α e β. Quando g inalzato a questo più piccolo dei tre esponenti sarà radice della (24) si avrà dalle (30) e (31)

$$g^{\mu_\beta}=g^{2\gamma},\, g^{\nu_\beta}=g^{2\gamma+1};$$

e quando sarà radice della (25), le (34) e (35) daranno

$$g^{\mu_\beta}=g^{2\gamma+1},\, g^{\nu_\beta}=g^{2\gamma}.$$

Anche alla (37) *si* potrà dar la forma

$$\begin{Bmatrix} 0 & \infty & g^2 & g^3 \ldots\ldots g^{2\alpha} & g^{2\alpha+1} \ldots\ldots g^{p-1} & g \\ g^{2\delta} & g^{2\delta+1} & g^{\mu_1} & g^{\nu_1} \ldots\ldots 0 & \infty \ldots\ldots\ldots g^{\mu_t} & g^{\nu_t} \end{Bmatrix}$$

dove

$$g^{\mu_\beta} \equiv g^{2\delta+1} \frac{g^{2(\beta-\alpha)}-1}{g^{2(\beta-\alpha)-1}-1} = g^{2\delta+1} \frac{g^{2(\alpha-\beta)}-1}{g^{2(\alpha-\beta)+1}-1},$$

$$g^{\nu_\beta} \equiv g^{2\delta+1} \frac{g^{2(\beta-\alpha)+1}-1}{g^{2(\beta-\alpha)}-1} = g^{2\delta+1} \frac{g^{2(\alpha-\beta)-1}-1}{g^{2(\alpha-\beta)}-1};$$

d'onde si deduce analogamente

$$g^{\mu_\beta} = g^{2\gamma+1},\ g^{\nu_\beta} = g^{2\gamma},$$

oppure

$$g^{\mu_\beta} = g^{2\gamma},\ g^{\nu_\beta} = g^{2\gamma+1}.$$

Dunque le sostituzioni (36) e (37) o permutano tra loro le lettere di ciascuna delle seguenti $\frac{p+1}{2}$ coppie

(38) $\quad 0\ \infty\quad g^2 g^3\quad g^4\, g^5 \ldots\ g^{2\alpha}\, g^{2\alpha+1} \ldots\ g^{p-1}\, g$

ossivero permutano le coppie stesse una nell'altra.

Questa proprietà non appartiene ad alcuna delle altre sostituzioni del gruppo M, e del tipo (22). Infatti, supponiamo che goda di questa proprietà la seguente

$$(39) \qquad \begin{Bmatrix} i \\ a\,\dfrac{i-b}{i-c} \end{Bmatrix}:$$

essa avrà anche la forma

$$\begin{Bmatrix} 0 & \infty & b & c & \ldots\ldots \\ \dfrac{ab}{c} & a & 0 & \infty & \ldots\ldots \end{Bmatrix};$$

in conseguenza dovrebbe aversi

$$b \equiv g^{2\gamma}, \qquad c \equiv g^{2\gamma+1},$$

ovvero

$$b \equiv g^{2\gamma+1}, \quad c \equiv g^{2\gamma};$$

e affinchè fossero congiunte $\frac{ab}{c}$ e a, nel 1.° caso dovrebbe aversi $a \equiv g^{2\delta+1}$, e nel 2.° $a \equiv g^{2\delta}$, e quindi la (39) o sarebbe una delle (37) o una delle (36).

Quanto alle sostituzioni del gruppo M, e dei tipi (20) e (21) è facile a vedersi che godranno la proprietà in quistione soltanto le seguenti.

$$(40) \quad \begin{Bmatrix} i \\ g^{2\delta} i \end{Bmatrix}, \qquad (41) \begin{Bmatrix} i \\ \frac{1}{g^{2\delta+1} i} \end{Bmatrix},$$

La (40) si può considerare come un caso particolare dolla (36), quello cioè in cui invece della coppia $g^{2\alpha+1}\, g^{2\alpha}$ si ponga o ∞; e la (41) si può dedurre egualmente dalla (37)

Pertanto le uniche sostituzioni (36), (37), (40), (41) del gruppo M saranno a lettere congiunte, cioè o permuteranno tra loro le lettere delle coppie (38) o permuteranno le coppie l'una nell'altra; e poichè i loro prodotti devono godere la stessa proprietà, esse constituiranno un gruppo L. Il grado di questo gruppo si otterrà numerando tutti i valori possibili delle costanti che compariscono nell'espressioni di quelle sostituzioni, perchè sono tutte quante reali. Ora δ può avere $\frac{p-1}{2}$ valori differenti, e α $\frac{p+1}{2}$; quindi è facile dedurre che $\frac{(p-1)(p+1)}{2}$ sarà il grado di L.

Derivando L per mezzo delle sostituzioni (19) non comprese nelle espressioni (36) (37) (40) (41) si avranno p gruppi derivati simili, la somma dei quali constituirà il gruppo

M di grado

$$\frac{p(p-1)(p+1)}{2}.$$

5.° Quando $p = 4n + 1$ non si può, come per $p = 4n + 3$, construire con alcune sostituzioni di M un gruppo di grado

$$\frac{(p-1)(p+1)}{2},$$

nel quale siano lettere congiunte o ∞, e altre coppie di lettere che abbiano un rapporto non residuo quadratico di p: poichè allora se appartengono a M le (36) e (40) non vi apparterranno le (37) e (41), e viceversa (v. n.° 4.°). Vediamo se per sostituzioni analoghe a quelle potranno esser congiunte oltre 0 e ∞, lettere che abbiano un rapporto residuo. Siano le coppie delle lettere congiunte le seguenti

$$0\ \infty\ g\ g^3 \ . \ g^4\ g^6 \ldots \ g^{p-1}\ g^2.$$

Alla sostituzione

$$\binom{i}{g^2 i}$$

può darsi la forma

$$\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & g & g^3 & g^4 & g^6 & \ldots & g^{p-1} & g^2 \\ 0 & \infty & g^3 & g^5 & g^6 & g^8 & \ldots & g^2 & g^4 \end{matrix}\right\}:$$

onde non sarà a lettere congiunte nel modo voluto, a meno che non sia

$$g^4 \equiv 1 (\text{mod.} p),$$

cioè

$$4 = p - 1,$$

e quindi

$$p = 5.$$

Lo stesso si trova per la sostituzione

$$\left\{\begin{matrix} i \\ \frac{1}{g^2 i} \end{matrix}\right\}$$

Dunque soltanto per $p = 5$, può tentarsi la decomposizione di M in p gruppi derivati simili e non eguali, nei quali siano congiunte le lettere che hanno un rapporto residuo. Ecco come ha luogo di fatto questa decomposizione.

Le tre sostituzioni

$$\left\{\begin{matrix} i \\ \frac{1}{i} \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{4i}\right\}, \quad \left\{\frac{1}{2\,\frac{i-1}{i+1}}\right\},$$

e quelle che si ottengono moltiplicando le medesime tra loro, danno il gruppo L a lettere congiunte di grado

$$\frac{(5+1)(5-1)}{2} = 12:$$

questo derivato per mezzo della sostituzione

$$\left\{\begin{matrix} i \\ i+1 \end{matrix}\right\},$$

dà i 5 derivati simili che sommati fanno il gruppo M di grado

$$\frac{(5+1)(5-1)5}{2} = 60.$$

(M)

(L)

∞ 0 2 3 4 1	∞ 0 3 2 4 1	∞ 0 3 2 1 4	∞ 0 2 3 1 4
2 3 4 1 ∞ 0	3 2 4 1 0 ∞	3 2 1 4 ∞ 0	2 3 1 4 0 ∞
4 1 ∞ 0 2 3	4 1 0 ∞ 3 2	1 4 ∞ 0 3 2	1 4 0 ∞ 2 3

(L_1)

∞ 1 3 4 0 2	∞ 1 4 3 0 2	∞ 1 4 3 2 0	∞ 1 3 4 2 0
3 4 0 2 ∞ 1	4 3 0 2 1 ∞	4 3 2 0 ∞ 1	3 4 2 0 1 ∞
0 2 ∞ 1 3 4	0 2 1 ∞ 4 3	2 0 ∞ 1 4 3	2 0 1 ∞ 3 4

(L_2)

∞ 2 4 0 1 3	∞ 2 0 4 1 3	∞ 2 0 4 3 1	∞ 2 4 0 3 1
4 0 1 3 ∞ 2	0 4 1 3 2 ∞	0 4 3 1 ∞ 2	4 0 3 1 2 ∞
1 3 ∞ 2 4 0	1 3 2 ∞ 0 4	3 1 ∞ 2 0 4	3 1 2 ∞ 4 0

(L_3)

∞ 3 0 1 2 4	∞ 3 1 0 2 4	∞ 3 1 0 4 2	∞ 3 0 1 4 2
0 1 2 4 ∞ 3	1 0 2 4 3 ∞	1 0 4 2 ∞ 3	0 1 4 2 3 ∞
2 4 ∞ 3 0 1	2 4 3 ∞ 1 0	4 2 ∞ 3 1 0	4 2 3 ∞ 0 1

(L_4)

∞ 4 1 2 3 0	∞ 4 2 1 3 0	∞ 4 2 1 0 3	∞ 4 1 2 0 3
1 2 3 0 ∞ 4	2 1 3 0 4 ∞	2 1 0 3 ∞ 4	1 2 0 3 4 ∞
3 0 ∞ 4 1 2	3 0 1 4 ∞ 2	0 3 ∞ 4 2 1	0 3 4 ∞ 1 2

6.° Poichè le due congruenze (24) e (25) sono di 2.° grado, e quindi ciascuna non può avere più di due radici incongrue, affinché abbia luogo la decomposizione dipendente dal Teorema del num. 4.°, non dovranno i numeri dispari $< p-2$ essere in numero > 4 ossia dovrà aversi

$$\frac{p-3}{2} \leqq 4;$$

onde p dovendo anch' essere della forma $4n+3$ e primo, non potrà essere che 7 e 11. In questi due casi però sono verificate tutte le condizioni del teorema.

1.° Caso: $p=7$; $g=3$ dà $\left(\frac{g-1}{p}\right)=\left(\frac{2}{7}\right)=1$; e (25) diviene

$$2x^2-4x+1\equiv 0 \pmod{7}$$

la quale è sodisfatta dalla potenza dispari di 3 minori di 5,

$$x\equiv 3\,,\ \equiv 3^3\,.$$

Le coppie di lettere congiunte del gruppo L saranno

$$0,\ \infty;\ 2,\ 6;\ 4,\ 5;\ 1,\ 3;$$

2.° Caso: $p=11$; $g=2$ dà $\left(\frac{g-1}{p}\right)=\left(\frac{1}{11}\right)=1$; e la (24) diviene

$$4x^2-6x+1\equiv 0 \pmod{11},$$

che ha per radici

$$x\equiv 2^3\,,\ \equiv 2^5\,.$$

La (25) dà

$$4x^3-3x+1\equiv 0,$$

le radici della quale sono

$$x\equiv 2\,,\ \equiv 2^7\,;$$

e in conseguenza tutte le condizioni del Teorema sono sodisfatte; e le coppie di lettere congiunte di L saranno

$$0,\infty;\quad 4,8;\quad 5,10;\quad 9,7;\quad 3,6;\quad 1,2.$$

Da tutto ciò si raccoglie che per $p=5,7,11$ il gruppo M é la somma di 5,7,11 gruppi L derivati simili, a lettere congiunte ciascuno; ma che questo non ha luogo per i numeri primi maggiori di questi.

7.° Poichè il gruppo K della equazione modulare per l'ordine p è il prodotto del gruppo M per uno N di 2.° gra-

do, aggiunta una funzione delle radici variabile per le sole sostituzioni di M, non rimarrà che da risolversi una equazione di 2°. grado (*). Ora una funzione razionale delle radici invariabile per le sostituzioni di L, acquista per tutte le sostituzioni di M p soli valori, i quali sono per ciò radici di una equazione di p^{esimo} grado; e poi chè ciascuno di questi è invariabile per le sostituzioni di uno solo dei gruppi derivati simili L, e variabile per quelle degli altri, aggiunti tutti, sarà ridotto il gruppo a N soltanto, e quindi aggiunto anche un radicale di 2°. grado, sarà risoluta la equazione modulare (**). equazione di p^{esimo} grado dalla quale dipende la risoluzione della equazione modulare nei tre casi rammentati, non può risolversi per radicali, poichè è di grado primo, e il suo gruppo, simile a M, è di grado $\frac{(p-)(+1)}{2} > (p-1)$ (***): laonde si possono stabilire i seguenti teoremi.

Teorema I. *La equazione modulare per la trasformazione dell'ordine p^{esimo} non è risolvibile per radicali ma può abbassarsi dal gradò $p+1$ al grado p, nei tre casi di $p=5, 7, 11$.*

Questo Teorema è dovuto a *Galois* chè lo annunziò nella ultima sua lettera a *Chevalier*.

Teorema II. *La equazione che serve a determinare Sen am $\frac{\omega}{p}$ è decomponibile in $p+1$ fattori di grado $p-1$ risolvibili per radicali, quando si aggiungano le radici di una equazione di grado $p+1$ la quale non è risolvibile per radicali, ma si può abbassare al grado p, quando $p=5, 7, 11$.*

Pistoja, li 27 Novembre 1852.

(*) Vedi la mia Mem. Sulla riduzione delle equazioni Parte II, n. 10.
(**) Vedi ivi, Parte II; n. 18.
(***) V. ivi P. II. n. 23.

DIMOSTRAZIONE SU DUE TEOREMI DI GEOMETRIA.

COMUNICAZIONE

DEL PROF. ANTONIO BERNARDI
di Modena.

Fin dall'anno 1851 il giovine Pietro Riccardi di Modena, distinto allievo della scuola dei cadetti Pionieri, mi lesse un suo scritto concernente la dimostrazione di due eleganti teoremi di geometria (*).

Cotesti due teoremi già intraveduti in parte, ed in alcuni casi speciali anche addimostrati da valenti matematici, non erano stati fin quì svolti in tutta la loro estensione, ondechè lasciavano campo a qualche studioso di approfondirli e collegarli ad un solo principio geometrico, del quale a guisa di tanti corollarj ne discendessero le verità correlative. Questo sensato lavoro é stato appunto eseguito dal giovine Riccardi, e nel suo breve, ma sucoso scritto, oltre d'avere sommamente semplificate le altrui dimostrazioni ha saputo sollevarsi al vero punto di vista e porgerne quindi la generale dimostrazione con una concisione e con tale disinvoltura che onorano il giovine alunno. Il nostro autore si apre la via alla discussione dei due teoremi in discorso nel seguente modo.

« La singolare proprietà inerente alla natura di alcune » curve, ad uguali condizioni sottoposte, di costantemente » riprodursi, fu soggetto fecondo a molti e segnalati studj » dei primi cultori dell' analisi infinitesimale. Giacomo Ber- » noulli volea scolpito sulla propria tomba il celebre motto: » *eadem mutata resurgo* - a perpetua ricordanza dell'elegante

(*) Ciò sia detto per constatare la data dello scritto.

» carattere da lui trovato nella spirale logaritmica di rina-
» scere nella sua evoluta, nella sua caustica, nella sua an-
» tievoluta e nella sua pericaustica. Analoghe proprietà fu-
» rono scoperte dallo stesso Bernoulli e dall'Huyguens nella
» cicloide : il Leibnitz poi innalzandosi a più generali con-
» siderazioni sulle curve che si formano da una infinità di
» linee rette o curve concorrenti in una serie di punti, di-
» sposti secondo una data legge, riuscì in certa guisa a por-
» re sotto un punto solo di vista ed a riunire in un sol
» corpo di scienza tutte le speciali considerazioni che per lo
» innanzi eransi fatte dai prelodati geometri.

» Se non che il genio del dotto da Lipsia di rado appli-
» cato ai minuti particolari, sollevavasi alla pura contempla-
» zione dei metodi, de'quali resosi una volta padrone lascia-
» va ad altri la briga di applicarli, approfondirli e perfezio-
» narli. Queste dottrine adunque schiusero un nuovo e va-
» sto campo alla geometria, in cui se molta messe vi rac-
» colsero i primi coltivatori, nè rimase tuttavia ad altri il
» comodo di spilogarvi utilmente. Per la qual cosa coll'in-
» tendimento di fare una semplice applicazione di questa teo-
» ria alle sezioni del cono, ho assieme riuniti i due seguenti
» teoremi, in ciascuno dei quali le sezioni medesime, sotto
» due condizioni diverse, costantemente si riproducono. E
» tanto più volentieri mi sono applicato a questo, comunque
» tenue, lavoro in un epoca, in cui non a torto si giudica
» della importanza delle cose dalla pratica utilità che ne de-
» riva, in quanto che taluno potrebbe farne utili applicazioni
» nella pratica geodesia, e dedurne nuovi e semplici artifizi
» per la costruzione meccanica di queste curve ».

In questo breve proemio l'autore ha per iscopo di far conoscere il principio che l'ha guidato all'analisi dei due teoremi che formano il soggetto della sua Memoria, di mostrare il nesso che li congiunge, e di far vedere che questi altro non sono che due modificazioni di una vasta teoria che li ge-

nera ed abbraccia, come si farà palese dal sunto che ne porgiamo ai giovani studiosi.

Era già noto il teorema — La linea che passa per tutti i punti di mezzo delle corde condotte da un medesimo punto della periferia di un cerchio, è pure un cerchio di raggio uguale alla metà di quello del primo. —

La maggiore ampliazione di questo teorema suggerita dal Lotteri (*) consisteva nel considerare il caso in cui le rette fossero divise in una medesima e qualsivoglia ragione, e questo concetto forma appunto il primo passo alla generalizzazione del teorema, il quale, come risulta dal processo analitico del Riccardi, sussiste ancora quando il punto dal quale partono le rette sia dentro o fuori della periferia circolare. Di più, non solo nel cerchio si dimostra verificarsi una tale proprietà, ma eziandio nelle altre sezioni del cono, elisse, iperbola e parabola, ondechè in seguito alle parziali dimostrazioni, esibite dall'autore per ciaschedun caso particolare, ed alla generale che tutte le comprende, si può conchiudere che:

« La linea che passa per i punti in cui sono divise in una qualsivoglia ragione le rette condotte da un punto qualunque del diametro principale, o del suo prolungamento, di una curva di second'ordine al suo perimetro, è sempre della stessa natura di quelle curve medesime: cioè nel cerchio è un cerchio, nell'elisse è una elisse, nell'iperbola è una iperbola, nella parabola è una parabola; e gli elementi della seconda sono sempre uguali a quelli della prima moltiplicati pel dato rapporto. »

Ma la maggiore estensione di cui era suscettibile questa elegante proprietà delle curve di second'ordine, consisteva nel considerare il caso in cui il punto donde si spiccano le rette fosse comunque situato nello spazio, e ciò appunto è

(*) Introd. al Calcolo Sublime Part. II. §. 33.

stato felicemente tentato dal nostro autore, il quale con rigorosa dimostrazione geometrica è giunto a stabilire il primo teorema che nella sua maggiore generalità viene annunciato nei seguenti termini.

« Il luogo geometrico dei punti in cui sono divise in un dato rapporto tutte le linee rette che partendo da un punto qualunque vanno ad una delle curve di second'ordine, è sempre una curva della stessa specie di quella che si assume a direttrice delle linee medesime. »

La determinazione del luogo geometrico dei centri dei circoli inscritti ai triangoli compresi dai raggi vettori, e dalla distanza focale nelle sezioni del cono, forma il soggetto del secondo teorema, di cui il nostro Riccardi ne riporta in succinto la storia nel modo seguente.

« Il Signor Oddi in una sua pregiata Memoria *sopra alcune curve dipendenti dalle sezioni del cono* (*) presentò diversi perfezionamenti alle dimostrazioni di alcuni problemi di geometria analitica, proposti in parte dal Du-Boi, e generalizzati dai distinti geometri Settele e Pessuti. E poichè nelle proposizioni contemplate dall'Oddi, alcune fra le curve di second'ordine, dietro certe condizioni, si riproducono, ondechè presi argomento dall'analogia che presentavano colla dottrina che forma il soggetto di questa breve Nota, per applicarmi a viemaggiormente estenderla e perfezionarla. A tale scopo, oltre avere tentata una via più breve per arrivare agli stessi risultati, ed estese le proprietà medesime a tutte le curve di second'ordine, ho cercato di comprendere tutte le diverse proposizioni relative in un solo teorema, cui soddisfacesse una dimostrazione generale e diretta, basata quindi sopra un solo principio, ed applicabile a ciascun caso particolare. Finalmente ho

(*) Opus. Scient. Bolog. 1818 fas. XI. — Mem. Soc. Ital. Tom. XIX. pag. 377.

» procurato di dare a questo teorema la maggiore genera-
» lità possibile, estendendone l'applicazione ai solidi di rivo-
» luzione, e determinando i rapporti fra gli elementi delle
» superficie, o dei volumi generati e generatori. »

Conformemente all'enunciato il nostro autore si applica in primo luogo alla semplificazione delle dimostrazioni esposte dai prefati geometri, ed alla determinazione in ciascun caso particolare dei rapporti fra le curve generate e generatrici. Poscia salendo a maggiore generalità, ne porge una dimostrazione diretta e generale, mediante la quale arriva agli stessi risultati, introducendo opportunamente nelle formole generali le equazioni delle diverse curve di second'ordine.

Se non che rispetto al circolo in cui i fuochi si trovano riuniti nel centro, ha immaginato che i raggi vettori partano dall'estremità del diametro, ed in tale ipotesi ha pure dimostrato verificarsi la riproduzione della stessa curva.

Per le quali cose egli intende essere riuscito a comprendere in una sola enunciazione il suo teorema, esponendola nei seguenti termini:

« Se in ciascuna delle curve di second'ordine, sezione del cono, si congiungono i fuochi con un punto qualunque della curva, e nel triangolo che ne risulta, s'inscriva un cerchio, il luogo geometrico di tutti i centri di tali circoli similmente determinati, per la curva elittica è una nuova elisse, per l'iperbola sono due rette tangenti la curva ai due vertici, per la parabola è una nuova parabola, e per il cerchio è una curva circolare. »

L'autore termina la sua Memoria con alcuni corollarj dell'enunciato teorema, applicato ai diversi solidi di rivoluzione, non che ai rapporti fra loro esistenti, fra i quali ne piace di segnalare l'elegante proprietà della paraboloide generatrice di essere cioè sempre quadrupla della sua generata.

LETTERA
DEL SIG. F. BRIOSCHI AL COMPILATORE

Signor Professore

Spiacemi il dover occupare ancora una pagina degli Annali compilati da V. S. in una quistione per la quale già ne occupai forse troppo. E tanto più mi spiace, in quanto che le osservazioni inserite nel fascicolo di Febbrajo 1853 di detti Annali sotto il titolo « *Sulle linee tautocrone. Osservazioni aggiunte all'articolo del Sig. Bertrand* » non meritando considerazione veruna comechè erronee o futili; anche la risposta a quelle osservazioni non potrà avere alcuna importanza scientifica.

Non so comprendere come un matematico possa fare questo ragionamento.

Data la equazione:

$$t = -\int_0^\alpha \frac{1}{v(s,\alpha)}\, ds$$

supponendo $\frac{dt}{d\alpha} = 0$, il valore di v che si ottiene dall'eseguire effettivamente la derivazione rispetto ad α, sostituito nel secondo membro dell'equazione medesima, non potrà rendere $t = \text{cost.}^e$ che per forme particolari assegnate alla funzione *arbitraria* che entra a formare il valore stesso di v. In questo ragionamento l'errore è duplice, sia cioè per quanto si riferisce al calcolo degli integrali definiti, sia per quanto si riferisce all'integrazione di equazioni alle derivate parziali. Ma quantunque l'errore sia manifesto, discenderò a considerare anco le apparenze alle quali pare si tenga principalmente il Sig. Anonimo. La formola da me data per la velocità nella prima nota sulle linee tautocrone (Agosto 1852, pag. 367) è la seguente:

$$(1) \qquad v = \frac{1}{f'(s)}\, \lambda\big(f(\alpha) - f(s)\big)$$

della quale il Sig. Anonimo dice « non includere la condizione del tautocronismo ». E lo prova nel seguente modo; posto:

$$f(\alpha) - f(s) = u\,, \qquad \frac{1}{\lambda(u)} = F'(u)$$

si ha:

$$v = -\frac{1}{F'(u)\dfrac{du}{ds}}$$

per cui:

$$t = F(0) - F\Big(f(\alpha) - f(0)\Big)\,.$$

E quindi accontentandosi delle apparenze dice il t non essere indipendente da α, *e la formola* (1) *porgere il valore di t libero dall'integrale è nulla di più*. Ma se il Sig. Anonimo si fosse dato la pena di leggere con qualche attenzione quella mia nota, avrebbe osservato che essendo:

$$f(\alpha) = \int \frac{1}{\varphi(\alpha)}\,d\alpha\,, \quad f(s) = \int \frac{1}{\varphi(s)}\,ds,$$

inoltre:

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)} = \frac{k'(\alpha)}{k}\,, \qquad \frac{1}{\varphi(s)} = \frac{z'(s)}{z}$$

e quindi:

$$f(\alpha) = \log.Ak\,, \qquad f(s) = \log.Bz$$

A, B costanti; si ha:

$$f(\alpha) - f(s) = \log.\,C\,\frac{k}{z}$$

ed

$$f(\alpha) - f(0) = \log.\,\infty$$

giacchè z è tal funzione che annullasi per $s = 0$(pag. 365). Dunque il t contiene solo apparentemente la α, e ciò per la natura stessa delle operazioni eseguite, lasciando interamente arbitraria la forma della funzione f, come deve aver luogo finchè il problema si riguardi dal solo lato analitico.

Ho chiamato anche futili le osservazioni del Sig. Anonime, e tale appunto è la seconda di esse; nella quale l'autore chiama : *impiegare debitamente la differenziazione della funzione soggetta all'integrale*, cioè della :

$$\int_0^a \frac{1}{v(s, \alpha)} ds ,$$

il porre $s = \alpha\omega$, ω nuova variabile; intendendosi forse che non sia *debitamente impiegata* quell'operazione il porre $z = k\omega$, essendo z una funzione qualunque di s; k il valore della medesima funzione dove in luogo di s pongasi α, come io feci in quella nota. Se in luogo di *debitamente* avesse il Sig. Anonimo detto, *più brevemente*, poteva analiticamente aver ragione; ma non già nel problema delle tautocrone, giacchè quell'ipotesi condurrebbe ad una formola per la forza acceleratrice contenente una sola funzione arbitraria, e quindi molto meno generale di quella di Lagrange.

Pavia il 5 marzo 1853.

SULLE SERIE DI NUMERI CHE COMPRENDONO I BERNOULLIANI

NOTA

DEL SIG. PROF. GIUSTO BELLAVITIS

Una Nota del Sig. Prof. Genocchi sui numeri Bernulliani pubblicata negli Annali dello scorso settembre mi dà occasione di riportare quì una tavoletta di coefficienti numerici, che tornano opportuni in frequentissime circostanze ed alcune formule, che io pubblicai negli Annali delle scienze del Regno Lombardo-Veneto (1. bim. 1834), altre aggiungendovene, che successivamente raccolsi.

Tavola dei numeri che io segno con $(n)_r$, i valori di n essendo scritti nella prima colonna, e quelli di r (sempre positivi) nella prima riga orizzontale.

	1	2	3	4	5	6	7
— 3	6	25	90	301	966	3025	9330
— 2	3	7	15	31	63	127	255
— 1	1	1	1	1	1	1	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{-1}{120}$	0	$\frac{1}{252}$	0
1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{-1}{120}$	0	$\frac{1}{252}$	0
2	1	$\frac{-5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{-1}{120}$	$\frac{-1}{120}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{252}$
3	3	2	$\frac{-3}{4}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{-1}{40}$	$\frac{-4}{315}$	$\frac{1}{84}$
4	6	11	6	$\frac{-251}{120}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{-221}{2520}$	$\frac{-11}{420}$
5	10	35	50	24	$\frac{-95}{12}$	$\frac{863}{504}$	$\frac{-95}{252}$
6	15	85	225	274	120	$\frac{-19087}{504}$	$\frac{1375}{168}$

1. Questi numeri $(n)_r$ sono i coefficienti degli sviluppi dei fattoriali in potenze, o viceversa; cioè si ha

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} [a]^n &= a(a+1)(a+2)\ldots\ldots(a+n-1) \\ &= a^n + (n)_1 a^{n-1} + (n)_2 a^{n-2} \ldots + (n)_{n-1} a \end{aligned} \right.$$

$$(2)\quad \begin{cases} [a]^{-n} = \dfrac{1}{(a-1)(a-2)(a-3)\ldots.(a-n)} \\ = a^{-n} + (-n)_1\, a^{-n-1} + (-n)_2\, a^{-n-2} + \text{ecc.} \end{cases}$$

e viceversa

$$(3)\quad a^n = [a]^n - (1-n)_1\,[a]^{n-1} + (2-n)\,[a]^{n-2} \ldots \mp (-1)_{n-1}\,a$$

$$(4)\quad a^{-n} = [a]^{-n} - (1+n)_1\,[a]^{-n-1} + (2+n)_2\,[a]^{-n-2} - \text{ec.}$$

Servano d'esempio

$$[a]^3 = a^3 + 3a^2 + 2a,$$

$$[a]^{-3} = a^{-3} + 6a^{-4} + 25a^{-5} + 90a^{-6} + \text{ec.},$$

$$a^4 = [a]^4 - 6[a]^3 + 7[a]^2 - a,$$

$$a^{-3} = [a]^{-3} - 6[a]^{-4} + 35[a]^{-5} - 225[a]^{-6} + \text{ec.}$$

2. Il numero $(n)_r$ per n positivo è perciò la somma dei prodotti ad r ad r che possono aversi coi numeri 1, 2, 3, . . . $(n-1)$ senza alcuna ripetizione; e $(-n)_r$ le somme dei prodotti ad r ad r dei numeri stessi con ripetizione.

3. I suddetti numeri sono dati dalle formule

$$(5)\begin{cases} (n)_1 = \dfrac{(-n)(1-n)}{2}, \quad (n)_2 = \dfrac{1-3n}{24}[-n]^3, \\ (n)_3 = \dfrac{n(n-1)}{48}[-n]^4, \quad (n)_4 = \dfrac{-2-5n+30n^2-15n^3}{5760}[-n]^5, \\ (n)_5) = \dfrac{n(n-1)(3n^2-7n-2)}{11520}[-n)^6, \text{ ec.} \end{cases}$$

Le quali possono anche scriversi così:

$$(6)\begin{cases}(n)_1 = [0]^{-2}[-n]^2\,, \\ (n)_2 = 2[0]^{-3}[-n]^3 + 3[0]^{-4}[-n]^4\,, \\ (n)_3 = 6[0]^{-4}[-n]^4 + 20[0]^{-5}[-n]^5 + 15[0]^{-6}[-n]^6\,, \\ (n)_4 = 24[0]^{-5}[-n]^5 + 130[0]^{-6}[-n]^6 \\ \qquad + 210[0]^{-7}[-n]^7 + 105[0]^{-8}[-n]^8,\ \text{ec.}\end{cases}$$

i cui coefficienti numerici facilmente si determinano col mezzo di quelli della formula precedente, cioè delle relazioni

$$20 = 4(2+3)\,,\quad 15 = 5(3+0),\quad 24 = 4.\,6,$$
$$130 = 5(6+20),\quad 210 = 6(20+15),\quad 105 = 7(15+0)\,,$$
$$120 = 5.\,24\,,\quad 924 = 6(24+130)\,,\quad 2380 = 7(130+210),$$
$$2520 = 8(210+105)\,,\quad 945 = 9(105+0)\,,\quad \text{ec.}$$

4. Alle (6) può darsi altra forma contenente i numeri della nostra tavola posti in colonna verticale, cioè

$$(7)\begin{cases}(n)_r = \Big(\mp\dfrac{(-1)_r}{[1]^{r-1}}[n+2]^{r-1} \pm \dfrac{(-2)_r}{[1]^{r-2}[r+2]}[n+3]^{r-2}[n+1]^1 \\ \quad \mp \dfrac{(-3)_r}{[1]^{r-3}[r+2]^2}[n+4]^{r-3}[n+1]^2 \ldots\ldots \\ \quad - \dfrac{(1-r)_r}{1[r+2]^{r-2}}[n+r]^1[n+1]^{r-2} \\ \quad + \dfrac{(-r)_r}{[r+2]^{r-1}}[n+1]^{r-1}\Big)[0]^{-r-1}[-n]^{r+1}\,.\end{cases}$$

Esempio

$$(n)_4 = \Big(\frac{-1}{1.2.3}[n+2]^3 + \frac{31}{1.2.6}[n+3]^2[n+1]$$

$$-\frac{301}{1.6.7}[n+4][n+1]^2 + \frac{1701}{6.7.8}[n+1]^3\Big)[0]^{-5}[-n]^5.$$

5. Dalle precedenti formule risulta che tutti i $(n)_r$ si annullano quando $r+1>n>-1$; perciò nella precedente tavola avrei dovuto porre lo zero in luogo di tutti i numeri frazionari; ma ho supposto che in tal caso si togliesse alle precedenti formule il fattore che le annulla, il che io esprimo con $\frac{1}{0}(n)_r$. Per tal maniera scrissi nella tavola in luogo di

$$(2)_2=0 \quad \text{il} \quad \frac{1}{0}(2)_2=\frac{-5.-2.-1}{24}=-\frac{5}{12};$$

così pure

$$\frac{1}{0}(2)_3=\frac{2.1.-2.-1}{48}=\frac{1}{12}, \text{ ec.}$$

6. Vedremo che anche questi numeri $\frac{1}{0}(n)_r$ tornano di grande utilità. Intanto notiamo che quelli corrispondenti ad $n=0$, $n=1$, $n=2$ dipendono dai numeri Bernoulliani giacchè

$$(8) \qquad B_{n-1}=\pm\frac{n}{0}(1)_n .$$

Se nelle (7) poniamo $n=0$ si ha per esempio

$$(9)\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{0}(0)_4=\Big(-\frac{2.3.4}{1.2.3}+31\,\frac{3.4.1}{1.2.6}-301\,\frac{4.1.2}{1.6.7}\\ &\quad+1701\,\frac{1.2.3}{6.7.8}\Big)[0]^{-5}\,[1]^4=-\frac{1}{120}.\end{aligned}\right.$$

7. La tavola dei numeri $(n)_r$ si costruisce facilmente col mezzo della relazione

$$(10) \qquad (n+1)_r=(n)_r+n(n)_{r-1},$$

avvertendo che

$$(11) \qquad (n)_0=1, \quad (-1)_r=1,$$

$$(12) \qquad (r+1)_r = [1]^r .$$

Colla stessa (10) si calcolano anche i numeri frazionarii $\frac{1}{0}(n)_r$, purchè se ne conosca la prima riga $\frac{1}{0}(0)_r$ dipendente dai numeri Bernoulliani.

8. I numeri della linea obbliqua discendente 3, 11, 50, 274,... danno la somma della serie armonica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots,$$

giacchè

$$(13) \qquad (n+1)_{n-1} = [1]^n \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

9. Moltissime relazioni hanno luogo tra i numeri interi $(n)_r$ ed anche tra i frazionarii $\frac{1}{0}(n)_r$. Eccone una che comprende i prodotti dei numeri posti in due righe orizzontali della tavola

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} (n)_r - (n)_{r-1}(r-n)_1 + (n)_{r-2}(r-n)_2 \ldots \\ \qquad \mp (n)_1 (r-n)_{r-1} \pm (r-n)_r = 0 ; \end{array} \right.$$

per esempio se $n=5$, $r=3$ si ha

$$50 - 35.3 + 10.7 - 15 = 0.$$

L'equazione sussiste anche rispetto ai $\frac{1}{0}(n)_r$, ed anche divisa per zero, il secondo membro resta nullo; avvertendosi per altro che quando si giunge ad un termine pel quale il fattore zero dee togliersi dal secondo fattore $(r-n)_t$ anzichè dal primo $(n)_i$ bisogna cangiare i segni; così per esempio

$$\frac{1}{0}(4)_4 + (4)_3 \frac{1}{0}(0)_1 - (4)_2 \frac{1}{0}(0)_2 + (4)_1 \frac{1}{0}(0)_3 - \frac{1}{0}(0)_4 = 0,$$

cioè

$$-\frac{251}{120}+6\ \frac{1}{2}-11\ \frac{1}{12}+6.\ 0-\frac{-1}{120}=0.$$

Col mezzo di questa formula si possono calcolare tutti i $\frac{1}{0}(n)_r$ conoscendo i $\frac{1}{0}(0)_r$, cioè i numeri Bernoulliani.

10. Colla stessa avvertenza anche dalla

$$(15)\left\{\begin{array}{l}(n)_r+(n)_{r-1}(r-n)_1+(n)_{r-2}(r-n)_2\ldots\\ \quad+(r-n)_r=[n-r+1]^r[0]^{-r}[1-n]^r\end{array}\right.$$

può togliersi il fattore zero che la annulla. Così se ne può dedurre non solo la

$$35+10.6+25=[4]^2[0]^{-2}[-4]^2=120,$$

ma anche la

$$\frac{-251}{120}-6.\frac{1}{2}-11.\frac{1}{12}-6.0-\frac{-1}{120}$$
$$=[1]^4[0]^{-4}[-3]^3=-6.$$

Non sono molto differenti dalle precedenti formule le

$$(16)\left\{\begin{array}{l}(n)_r-(n)_{r-1}(r-n+1)_1+(n)_{r-2}(r-n+1)_2\ldots\\ \quad\pm(r-n+1)_r=[n-r]^r.\end{array}\right.$$

$$(17)\left\{\begin{array}{l}(n)_r+(n)_{r-1}(r-n+1)_1+(n)_{r-2}(r-n+1)_2\ldots\\ \quad+(r-n+1)_r=\pm[1-n]^r[0]^{-r}[1-n]^r;\end{array}\right.$$

esempii

$$35-10.3+7=[3]^2,\ 35+10.3+7=[-4]^2[0]^{-2}[-4]^2,$$

$$-\frac{251}{120}-6.\frac{1}{2}-11.\frac{1}{12}+6.0-\frac{-1}{120}=[1]^3,$$

$$-\frac{251}{120}+6.\frac{1}{2}-11.\frac{1}{12}-6.0-\frac{-1}{120}=0.$$

Dicasi lo stesso delle

$$(18)\ \begin{cases} (n)_r - (n)_{r-1}(r-n-1)_1 + (n)_{r-2}(r-n-1)_2 \ldots \\ \qquad \pm (r-n-1)_r = 0 \,. \end{cases}$$

$$(19)\ \begin{cases} (n)_r + (n)_{r-1}(r-n-1)_1 + \ldots \\ \qquad + (r-n-1)_r = \pm [-n]^r [0]^{-r} [-n]^r \,; \end{cases}$$

esempii

$$50 - 35.6 + 10.25 - 90 = 0 \,,$$

$$50 + 35.6 + 10.25 + 90 = -[-5]^3 [0]^{-3} [-5]^3 \,,$$

$$\frac{19}{120} - 0 - 2.\frac{1}{12} + 3.0 - \frac{-1}{120} = 0 \,,$$

$$\frac{19}{120} - 0 - 2.\frac{1}{12} - 3.0 - \frac{-1}{120} = 0 .$$

Si ha pure la

$$(20)\quad (n)_r - (n)_{r-1}(-n)_1 + (n)_{r-2}(-n)_2 \ldots \pm (-n)_r = \pm n^r \,,$$

esempio

$$0 - 2.6 + 3.25 - 90 = -3^3 \,.$$

11. Altre formule comprendono invece i prodotti di termini posti in due righe oblique discendenti; tali sono

$$(21)\ \begin{cases} (n)_r - (n-1)_{r-1}(-n)_1 + (n-2)_{r-2}(1-n)_2 - \ldots \\ \qquad \ldots\ldots \pm (r-n-1)_r = \pm [-n]^r [0]^{-r} \,; \end{cases}$$

$$(22)\ \begin{cases} (n)_r - (n-1)_{r-1}(1-n)_1 + (n-2)_{r-2}(2-n)_2 - \ldots \\ \qquad \pm (r-n)_1 = 0 \,; \end{cases}$$

$$(23)\ \begin{cases} (n)_r - (n-1)_{r-1}(2-n)_1 + (n-2)_{r-2}(3-n)_2 \ldots \\ \qquad \pm (r-n+1)_1 = [0]^{-r} [1-n]^r \,; \end{cases}$$

$$(24)\begin{cases}(n)_r-(n-1)_{r-1}(3-n)_1+(n-2)_{r-2}(4-n)_2\,.\,,\,.\,.\\ \pm(r-n+2)_r=2^r[0]^{-r}\left(\frac{r}{2}+1-n\right)[2-n]^{r-1}.\end{cases}$$

Esempii

$$50-11.15+3.65-90=-[-5]^3[0]^{-3};$$

$$50-11.10+3.25-15=0;$$

$$50-11.6+3.7-1=[0]^{-3}[-4]^3;$$

$$50-11.3+3.1-0=2^3[0]^{-3}\left(-\frac{5}{2}\right)[-3]^2;$$

$$\frac{863}{504}-\frac{9}{20}.15+\frac{19}{120}.65-\frac{1}{12}.90+\frac{1}{12}.31$$

$$-\frac{1}{2}.1-1.\frac{1}{252}=[-5]^5[0]^{-6};$$

$$\frac{863}{504}-\frac{9}{20}.10+\frac{19}{120}.25-\frac{1}{12}.15$$

$$+\frac{1}{12}.1-0-\frac{1}{252}=0;$$

$$\frac{863}{504}-\frac{9}{20}.6+\frac{19}{120}.7-\frac{1}{12}.1+0-0-\frac{1}{252}$$

$$=[0]^{-6}[-4]^4\,1;$$

$$\frac{863}{504}-\frac{9}{20}.3+\frac{19}{120}.1-0+0-0-\frac{-4}{315}$$

$$=2^6[0]^{-6}(-1)[-3]^3.$$

12. Le precedenti formule sono in parte comprese nelle due seguenti relative a prodotti di numeri posti in due righe orizzontali della tavola

$$(25)\begin{cases} \dfrac{(n)_r}{[1-n]^r}+\dfrac{(n)_{r-1}\,(m)_1}{[1-n]^{r-1}\,[1-m]^1}+\dfrac{(n)_{r-2}\,(m)_2}{[1-n]^{r-2}\,[1-m]^2}\cdots \\ \qquad +\dfrac{(m)_r}{[1-m]^r}=\dfrac{(m+n)_r}{[1-m-n]^r}\,. \end{cases}$$

$$(26)\begin{cases} \dfrac{(n)_r}{[1-n]^r}+\dfrac{(n)_{r-1}\,(m)_1}{[1-n]^{r-1}\,[-m]^1}+\dfrac{(n)_{r-2}\,(m)_2}{[1-n]^{r-2}\,[-m]^2}\cdots \\ \qquad +\dfrac{(m)_r}{[-m]^r}=\dfrac{(m+n)_r}{[-m-n]^r} \end{cases}$$

o nelle altre due relative a prodotti di numeri posti in due righe obblique discendenti

$$(27)\begin{cases} \dfrac{(n)_r}{[-n]^r}+\dfrac{(n-1)_{r-1}\,(m+1)_1}{[1-n]^{r-1}\,[-1-m]^1}+\dfrac{(n-2)_{r-2}\,(m+2)_2}{[2-n]^{r-2}\,[-2-m]^2}\cdots\cdots \\ \qquad +\dfrac{(m+r)_r}{[-r-m]^r}=\dfrac{(m+n)_r}{[-m-n]^r}\,, \end{cases}$$

$$(28)\begin{cases} \dfrac{(n)_r}{[-n]^r}+\dfrac{(n-1)_{r-1}\,(m+1)_1}{[2-n]^{r-1}\,[-m]^1}+\dfrac{(n-2)_{r-2}\,(m+2)_2}{[2-n]^{r-2}\,[-1-m]^2}\cdots \\ \qquad +\dfrac{(m+r)_r}{[-r+1-m]^r}=\dfrac{(m+n)_r}{[-m-n+1]^r}\,; \end{cases}$$

le quali quattro equazioni facilmente si dimostrano mediante le (39), (42).

Se qualche numeratore sia nullo, e nel denominatore vi sia il fattore 0, a questo si attribuirà il segno $+$, e si adopreranno i numeri frazionarii della tavola; esempio della (25)

$$\frac{(3)_4}{[-2]^2 0.1}+\frac{(3)_3\,(2)_1}{[-2]^2 0\,(-1)}+\frac{(3)_2\,(2)_2}{[-2]^2\,(-1)0}+\frac{(3)_1\,(2)_3}{(-2)(-1)0.1}$$

$$+\frac{(2)_4}{(-1)0.1.2}=\frac{(5)_4}{[-4]^4}=1.$$

13. Tra le moltissime conseguenze di queste formule ne daremo due che possono servire a determinare ogni numero Bernoulliano, cioè uno dei nostri $\frac{1}{0}(1)_r$ mediante due righe orizzontali dei numeri interi della tavola, oppure mediante una riga obbliqua. Se nella (26) poniamo $m = 1 - n$, ed $n = r + 1$ (supposto r pari) abbiamo

$$\frac{(r+1)_r}{[1]^r} - \frac{(r+1)_{r-1}(-r)_1}{[2]^{r-1}.r} + \frac{(r+1)_{r-2}(-r)_2}{[3]^{r-2}[r]^2} \cdots\cdots,$$

$$+ \frac{(-1)_r}{[r]^r} = \frac{(1)_r}{(-1)0\,[1]^{r-2}},$$

cioè

$$(29)\left\{\begin{aligned} &(r-1)r\,\frac{1}{0}(1)_r = -(r+1)_r + \frac{1}{r}(r+1)_{r-1}(-r)_1 \\ &-\frac{[r]^2}{[r]^2}(r+1)_{r-2}(-r)_2 \cdots\cdots - \frac{[1]^r}{[r]^r}(-r)_r, \end{aligned}\right.$$

esempio

$$\frac{12}{0}(1)_4 = -24 + \frac{1}{4}.50.10 - \frac{2}{20}.35.65 + \frac{6}{120}.10.350$$

$$-\frac{24}{840}\,1701 = \frac{-1}{10}.$$

Se nella (27) poniamo $m = 2 - n$, $n = r + 1$ otteniamo a motivo della (12)

$$\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r}\frac{(2-r)_1}{[r-2]^1} + \frac{1}{r-1}\frac{(3-r)_2}{[r-3]^2} \cdots + \frac{1}{3}\frac{(-1)_{r-2}}{[1]^{r-2}}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(0)_{r-1}}{[0]^{r-1}} + \frac{(1)_r}{[-1]^r} = \frac{(2)_r}{[-2]^r} = -\frac{r-2}{2}\frac{(1)_r}{[-1]^r},$$

e siccome quando r è pari si ha

$$\frac{1}{0}(0)_{r-1}=0\,,\quad \frac{1}{0}(2)_r=\frac{1}{0}(1)_r\,,$$

così

$$(30)\quad \frac{r}{2}\,\frac{(1)_r}{0[1]^{r-2}}=\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r}\,\frac{(2-r)_1}{[r-2]^1}\cdots+\frac{1}{3}\,\frac{(-1)_{r-2}}{[1]^{r-2}}\;;$$

esempio

$$\frac{1}{8}\,\frac{1}{0}(1)_6=\frac{1}{7}-\frac{1}{6}\,\frac{10}{4}+\frac{1}{5}\,\frac{25}{12}-\frac{1}{4}\,\frac{15}{24}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{24}\,.$$

14. Dalle medesime formule generali possiamo dedurne parecchie che dieno i numeri Bernoulliani senza bisogno di alcun'altro dei numeri della tavola. Così la (25) ponendovi $n=1$, $m=-1$, ed omettendo i termini nulli ci dà secondo che $r=2i$, oppure $r=2i+1$ le

$$(31)\quad \frac{(1)_{2i}}{[0]^{2i}}+\frac{(1)_{2i-2}}{[0]^{2i-2}\,[2]^2}\cdots+\frac{(1)_2}{[0]^2\,[2]^{2i-2}}=\frac{2i-1}{2[2]^{2i}}\,,$$

$$(32)\left\{\begin{aligned}&\frac{(1)_{2i}}{[0]^{2i}}+\frac{(1)_{2i-2}}{[0]^{2i-2}[3]^2}+\frac{(1)_{2i-4}}{[0]^{2i-4}\,[3]^4}\cdots\\&\qquad+\frac{(1)_2}{[0]^2\,[3]^{2i-2}}=\frac{2i}{[2]^{2i+1}}\,.\end{aligned}\right.$$

Esempio

$$\frac{1}{0}(1)_8=-\frac{7}{0}(1)_6-\frac{7}{0}(1)_4-\frac{1}{0}(1)_2+\frac{7}{2.8.9}=\frac{-1}{240}\,,$$

$$\frac{1}{0}(1)_8=-\frac{7}{2.0}(1)_6-\frac{7}{3.0}(1)_4-\frac{1}{4.0}(1)_2+\frac{8}{8.9.10}\,.$$

Se nella medesima (25) poniamo $m=n=1$, abbiamo per r pari

$$(33)\quad \begin{cases} \frac{r+1}{r-1}\frac{1}{0}(1)_r = -(r-2)\frac{1}{0}(1)_{r-2}\frac{1}{0}(1)_2 \\ \quad -\frac{(r-2)(r-3)}{1.2}\frac{1}{0}(1)_{r-4}\frac{1}{0}(1)_4 - \dots\dots \\ \quad -(r-2)\frac{1}{0}(1)_2\frac{1}{0}(1)_{r-2}. \end{cases}$$

Esempio

$$\frac{11}{9}\frac{1}{0}(1)_{10} = -16\frac{1}{0}(1)_8\frac{1}{0}(1)_2 - 112\frac{1}{0}(1)_6\frac{1}{0}(1)_4 = \frac{1}{108}.$$

Queste formule sono dovute al Moivre, l'ultima è la più comoda per calcolare successivamente i numeri Bernoulliani.

15. È sempre un intero la somma del numero Bernoulliano $\frac{2i}{0}(1)_{2i}$ e di tutte le frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... $\frac{1}{p}$ i cui denominatori sono quei numeri primi, che diminuiti dell' unità danno un divisore di $2i$.

16. Piuttosto della serie dei numeri Bernoulliani parrebbemi che fossero da considerarsi i numeri $\frac{1}{0}(1)_{2i}$, che appartengono alla classe più generale dei numeri $(n)_r$, oppure in particolare i numeri interi

$$(34)\quad \begin{cases} b_2 = \frac{4.3}{0}(1)_2 = 6B_1 = 1,\ b_4 = -\frac{16.15}{0}(1)_4 = 60B_3 = 2, \\ b_6 = \frac{64.63}{0}(1)_6 = 672B_5 = 16,\ b_8 = \frac{256.255}{0}(1)_8 = 272, \\ b_{10} = 7936,\ b_{12} = 353792,\ b_{14} = 22368256,\ b_{16} = 1903757312, \\ b_{18} = 209865342976, \text{ ec.} \end{cases}$$

(sono eziandio interi i $4^{1-i}\, i b_{2i} = 1, 1, 3, 17, 5.31, 3.691, 7.43.127, 257.3617, 9.73.43867,$ ec.).

Intermedii ai precedenti numeri sono pure gli altri meritevoli di considerazione

$$(35)\quad \begin{cases} b_1 = 1,\ b_3 = 1,\ b_5 = 5,\ b_7 = 61,\ b_9 = 1385 = 5.277, \\ b_{11} = 50521 = 19.2659,\ b_{13} = 2702765 = 5.13.43.967, \\ b_{15} = 199360981 = 47.4241723,\ b_{17} = 19391512145\ , \\ b_{19} = 2404879675441,\ \text{ec.} \end{cases}$$

17. Questi numeri, sì i primi che i secondi, possono calcolarsi successivamente mediante la relazione

$$(36)\quad b_r - \frac{(r-1)(r-2)}{1.2} b_{r-2} + \frac{(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} b_{r-4} \ldots \pm 1 = 0.$$

Si ha pure

$$(37)\quad \begin{cases} b_{2i} - 2\dfrac{(2i-2)(2i-3)}{1.2} b_{2i-2} \\ \qquad - 8\dfrac{(2i-2)(2i-3)(2i-4)(2i-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} b_{2i-4} \\ - 32\dfrac{(2i-2)(2i-3)(2i-4)(2i-5)(2i-6)(2i-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} b_{2i-6} - \text{ec.} = 0. \end{cases}$$

Per questi numeri dipendenti dai Bernoulliani si ha anche la

$$(38)\quad \begin{cases} -(-1)^i b_{2i} = 2^{2i-2} - [1]^2\, 2^{2i-3}\, (-2)_{2i-3} \\ + [1]^3\, 2^{2i-4}\, (-3)_{2i-4} \ldots - [1]^{2i-2}\, 2(2-2i)_1 + [1]^{2i-1}; \end{cases}$$

esempio

$$b_6 = 16 - 2.\ 8.\ 15 + 6.\ 4.\ 25 - 24.\ 2.\ 10 + 120.$$

18. Poniamo qui sotto alcune delle serie infinite che contengono i numeri precedenti, o quelli più generali della nostra tavola.

$$(39) \quad \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^n = 1 + \frac{(-n)_1}{[1+n]^1} x + \frac{(-n)_2}{[1+n]^2} x^2 + \text{ec.}$$

questa formula vale anche per n negativo, ma allora dopo un certo punto ai numeri interi della tavola susseguono i numeri frazionarii, che non si annullano a motivo del fattore 0 del denominatore : così

$$(40) \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{e^x - 1} &= 1 + \frac{1}{0}(1)_1 x + \frac{1}{0.1}(1)_2 x^2 + \text{ec.} \\ &= 1 - \frac{1}{2.1} b_1 x + \frac{1}{4.3.1} b_2 x^2 - \frac{1}{16.15\,[1]^3} b_4 x^4 + \text{ec.} \end{aligned} \right.$$

$$(41) \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{x}{e^x - 1}\right)^2 &= 1 + \frac{(2)_1}{-1} x + \frac{(2)_2}{-1.0} x^2 + \frac{(2)_3}{-1.\,0.\,1.} x^3 + \text{ec.} \\ &= 1 - x + \frac{5}{12} x^2 - \frac{1}{12} x^3 + \text{ec.} \end{aligned} \right.$$

19. Le righe oblique discendenti della nostra tavola danno i coefficienti, della serie

$$(42) \quad \left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^n = 1 + \frac{(1+n)_1}{[-1-n]} x + \frac{(2+n)_2}{[-2-n]^2} x^2 + \text{ec.}$$

che vale anche per n negativo; così per esempio

$$\left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)^{-3} = 1 + \frac{(-2)_1}{2} x + \frac{(-1)_2}{[1]^2} x^2 + \frac{(0)_3}{0.1.2} x^3$$

$$+ \frac{(1)_4}{-1.0.1.2} x^4 + \text{ec.} = 1 + \frac{3}{2} x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{240} x^4 - \text{ec.}$$

20. Dalle quali formule si derivano, come è noto, quelle che danno le relazioni tra le differenze finite e le derivate

$$(43) \quad \Delta^n y = d^n y + \frac{(-n)_1}{[1+n]^1} d^{n+1} y + \frac{(-n)_2}{[1+n]^2} d^{n+2} y + \text{ec.},$$

$$(44)\quad \begin{cases} \Sigma^n y = S^n y + \frac{(n)_1}{[1-n]^1} S^{n-1} y + \ldots \\ + \frac{(n)_n}{[1-n]^{n-1}} y + \frac{(n)_{n+1}}{[1-n]^{n-1}\, 0[1]^1} dy + \text{ec.} \end{cases}$$

ed in particolare

$$(45)\quad \begin{cases} \Sigma y = Sy - \frac{y}{2} + \frac{1}{4.3} b_2\, dy - \frac{1}{16.15.[1]^3} b_4\, d^3 y \\ + \frac{1}{64.63\,[1]^3} b_6\, d^5 y - \text{ec.} \end{cases}$$

Viceversa le derivate sono date colle differenze finite dalle

$$(46)\quad d^n y = \Delta^n y + \frac{(1+n)_1}{[-1-n]^1} \Delta^{n+1} y + \frac{(2+n)_2}{[-2-n]^2} \Delta^{n+2} y + \text{ec.}$$

$$(47)\quad \begin{cases} S^n y = \Sigma^n y + \frac{(1-n)_1}{[-1+n]^1} \Sigma^{n-1} y \ldots + \frac{(0)_n}{0[1]^{n-1}} y \\ + \frac{(1)_{n+1}}{[-1]^1\, 0[1]^{n-1}} \Delta y + \frac{(2)_{n+2}}{[-2]^2\, 0[1]^{n-1}} \Delta^2 y + \text{ec.} \end{cases}$$

21. Come caso particolare della (43) abbiamo

$$(48)\quad \begin{cases} \Delta^n (x^r) = r(r-1)\ldots(r-n+1) x^{r-n} + \\ \frac{r(r-1)\ldots(r-n)}{1+n} (-n)_1\, x^{r-n-1} \ldots + \frac{[1]^r}{[1+n]^{r-n}} (-n)_{r-n} \end{cases}$$

perciò se supponiamo che x prenda il valore zero, la differenza n^{esima} della serie 0, 1^r, 2^r, 3^r, ... è espressa da

$$(49)\quad [1]^n(-n)_{r-n} = n^r - n(n-1)^r + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^r \ldots \mp n.1^r.$$

Sommando alla (49) la sua analoga

$$[1]^{n-1}(-n+1)_{r-n+1} = (n-1)^r - (n-1)(n-2)^r + \text{ec.}$$

si ottiene (10) la

$$(50) \left\{ \begin{aligned} &[1]^{n-1}(-n)_{r-n+1} = n^r - (n-1)(n-1)^r \\ &+ \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(n-2)^r - \ldots \mp 1 . \end{aligned} \right.$$

22. Evidentemente si ha

$$\Delta^n(x^{n-1}) = 0.$$

Nello sviluppo di

$$\Delta^n(x^{n-1}) = (x+n)^{n-1} - n(x+n-1)^{n-1}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(x+n-2)^{n-2} \ldots \pm x^{n-1},$$

essendo x numero intero negativo, riteniamo i soli primi termini fino a quello che svanisce, perchè contiene 0^{n-1}, avremo così una serie di numeri interi che segneremo con

$$(x+n)^{n-1} - n(x+n-1)^{n-1} + \text{ec.}$$

Col loro mezzo potremo determinare i numeri b mediante la relazione

$$(51) \left\{ \begin{aligned} &b_{2n} = n^{2n-1} - 2n(n-1)^{2n-1} + \text{ec.} \\ &-2\Big[(n-1)^{2n-1} - 2n(n-2)^{2n-1} + \text{ec.}\Big] \\ &+2\Big[(n-2)^{2n-1} - 2n(n-3)^{2n-1} + \text{ec.}\Big] \\ &-2\Big[(n-3)^{2n-1} - \text{ec.}\Big] + \text{ec.} \end{aligned} \right.$$

o più speditamente

$$(52)\begin{cases} 2^{n-1}\, b_{2n} = n^{2n-1} - 2n(n-1)^{2n-1} + \text{ec.} \\ -2\left[(n-2)^{2n-1} - 2n(n-3)^{2n-1} + \text{ec.}\right] \\ +2\left[(n-4)^{2n-1} - \text{ec.}\right] - 2\left[(n-6)^{2n-1} - \text{ec.}\right] . \end{cases}$$

Esempio

$$8b_8 = 4^7 - 8.3^7 + 28.2^7 - 56 - 2(2^7 - 8) = 2176.$$

Così pure pei numeri b non dipendenti dai Bernoulliani

$$(53)\begin{cases} 2^{n-1}\, b_{2n+1} = n^{2n} - (2n+1)(n-1)^{2n} + \text{ec.} \\ - \left[(n-1)^{2n} - \text{ec.}\right] - \left[(n-2)^{2n} - \text{ec.}\right] \\ + \left[(n-3)^{2n} - \text{ec.}\right] + \left[(n-4)^{2n} - \text{ec.}\right] - \text{ec.} \end{cases}$$

dove si hanno successivamente due termini col segno — e due col segno +.

Esempio

$$8b_9 = 15619 - 4293 - 247 + 1.$$

23. La maniera più spedita per calcolare i numeri b è data dalla serie infinita

$$(54)\quad b_n = 2[1]^{n-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n \left\{1 + \left(\frac{-1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{-1}{7}\right)^n + \left(\frac{1}{9}\right)^n + \text{ec.}\right\}$$

della quale basteranno due soli termini quando $n = 19$. Gioverà osservare che i b_6, b_8 .... divisi per 60 lasciano alternativamente i residui 16, 32; ed i b_3, b_5 .... pur divisi per 60 danno i residui 1, 5.

Dalla (54) si deduce facilmente la

$$(55)\quad 1 + \frac{1}{2^{2i}} + \frac{1}{3^{2i}} + \text{ec.} = \frac{\pi^{2i}}{2^{2i}-1}\,\frac{b_{2i}}{2[1]^{2i-1}} .$$

24. Altre serie infinite espresse col mezzo dei numeri b, e dei (50) $(-2)_n = 2^{n+1} - 1$.

$$(56)\quad \frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{[1]^1\,2^2}\,b_2 x+\frac{1}{[1]^3\,2^4}\,b_4\,x^3-\text{ec.}$$

$$(57)\quad \text{tg.}x=x+\frac{1}{[1]^3}\,b_4\,x^3+\frac{1}{[1]^5}\,b_6\,x^5+\text{ec.}$$

$$(58)\quad \cot x=\frac{1}{x}-\frac{1}{3[1]^1}b_2 x-\frac{1}{15[1]^3}\,b_4 x^3-\frac{1}{63[1]^5}b_6\,x^5-\text{ec.}$$

$$(59)\quad \frac{x}{e^x-e^{-x}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3.4[1]^1}\,b_2\,x^2-\frac{7}{15.16[1]^3}\,b_4\,x^4-\text{ec.}$$

$$(60)\quad \frac{1}{\text{sen}x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{3.\,2}b_2 x+\frac{7}{15.8.6}b_4 x^3+\frac{(-2)_4}{32(-2)[1]^5}b_6\,x^5+\text{ec.}$$

$$(61)\quad \frac{1}{\cos x}=1+\frac{1}{1.\,2}\,b_3\,x^2+\frac{1}{1.2.3.4}\,b_5\,x^4+\text{ec.}$$

$$(62)\quad \frac{1}{\cos^2 x}=1+\frac{1}{1.\,2}\,b_4\,x^2+\frac{1}{1.2.3.4}b_6\,x^4+\text{ec.}$$

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)&=1+\frac{1}{1}\,b_2 x+\frac{1}{1.\,2}b_3\,x^2+\frac{1}{1.2.3}b_4\,x^3\\ &\quad+\frac{1}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}\,b_5\,x^4+\text{ec.}\end{aligned}\right.$$

La funzione *longitudinale iperbolica*

$$\log.\text{tg.}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right),$$

che serve a passare dai seni iperbolici ai circolari, io le indico con $\text{dig}_1 x$, perchè ad essa si riduce la *digamma* (prima trascendente ellittica) quando il modulo è uguale all'unità. Si ha

$$(64)\qquad \mathrm{dig}_1 x = x + \frac{1}{1.2.3} b_3\, x^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5} b_5\, x^5 + \text{ec.}$$

la sua funzione opposta si sviluppa cogli stessi coefficienti coi segni alternati :

$$(65)\qquad \mathrm{amp}_1 x = x - \frac{1}{1.2.3} b_3\, x^3 + \text{ec.}$$

È pure

$$(66)\left\{\begin{aligned} &\log.\mathrm{tg}\, x = \log x \\ &+ 2\left(\frac{1}{3[1]^2} b_2\, x^2 + \frac{7}{15[1]^4} b_4\, x^4 + \frac{(-2)_4}{(-2)_5[1]^6} b_6 x^6 + \text{ec.}\right) \end{aligned}\right.$$

hanno i coefficienti espressi col mezzo dei $(-n)_r$ le

$$(67)\left\{\begin{aligned} &e^{x-1} = 1 + 1\,\frac{x}{1} + \left(1 + (-1)_1\right)\frac{x^2}{1.2} \\ &+ \left(1 + (-2)_1 + (-1)_2\right)\frac{x^3}{1.2.3} \\ &+ \left(1 + (-3)_1 + (-2)_2 + (-1)_3\right)\frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ec.} \end{aligned}\right.$$

$$(68)\left\{\begin{aligned} &d^n\left(\frac{1}{e^x+1}\right) : dx^n = -(-1)_{n-1}\,\frac{e^x}{(e^x+1)^2} \\ &+ [1]^2\,(-2)_{n-2}\,\frac{e^{2x}}{(e^x+1)^3} - \text{ec.} \end{aligned}\right.$$

VOLUME DI UNA COLONNA TORSA CILINDRICA.

Crediamo far cosa grata agli ingegneri il rilevare qui da una Memoria sulle Colonne Torse del Sig. Capitano Faà di Bruno di Torino l'espressione del volume di una siffatta colonna, che s'incontra in quasi ogni genere di lavoro (*).

La colonna torsa cilindrica più considerarsi generata da una sinusoide che, girando attorno un asse parallelo e situato nel medesimo piano, s'innalza contemporaneamente d'una quantità proporzionale all'angolo descritto in modo a riprendere la primitiva posizione dopo un'intiera rivoluzione Si è perciò che l'autore denomina un tal sulido sinusoide spirale. Se si rappresenta l'altezza compresa fra due piani qualunque perpendicolari all'asse terminanti la colonna con h, con r la distanza dell'asse della sinusoide a quello attorno a cui essa gira, e con b l'ordinata massima della sinusoide sul proprio asse, il volume di una colonna torsa cilindrica sara espresso semplicemente dalla formula:

$$V = \pi h\left(r^2 + \frac{b^2}{2}\right)$$

Si trovano nella medesima Memoria altre generazioni di colonne torse, le quali dovrebbero far abbandonare d'ora in poi i processi empirici tenuti finora per disegnarle e concepirne la formazione.

(*) Mémoire sur les Colonnes Torses par M. Le Chevalier Faà de Bruno. Paris 1850.

SULLE LINEE DI CURVATURA DELLE SUPERFICIE

NOTA

DEL SIG. PROF. F. BRIOSCHI

Teor. 1°. Se la linea comune intersezione di due superfici sarà linea di curvatura tanto per l'una che per l' altra superficie; lungo di essa linea le due superfici si segano sotto un angolo costante.

Sieno

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0$$

le equazioni delle due superfici; posto per brevità:

$$F'(x)=X, \quad F'(y)=Y, F'(z)=Z, \quad \varphi'(x)=P, \quad \varphi'(y)=Q, \quad \varphi'(z)=R,$$

essendo la comune intersezione di esse, linea di curvatura della prima superficie avranno luogo le equazioni:

$$(1)\begin{cases} Xx' + Yy' + Zz' = 0 \\ x'(YZ' - Y'Z) + y'(ZX' - XZ') + z'(XY' - X'Y) = 0, \end{cases}$$

ed essendo anche linea di curvatura della seconda superficie sussisteranno le:

$$(2)\begin{cases} Px' + Qy' + Rz' = 0 \\ x'(QR' - Q'R) + y'(RP' - R'P) + z'(PQ' - P'Q) = 0. \end{cases}$$

Dalla prima delle equazioni (1), e dalla prima delle (2) si hanno le:

$$(3) \qquad \frac{x'}{YR - ZQ} = \frac{y'}{ZP - XR} = \frac{z'}{XQ - YP}$$

per le quali le altre due equazioni si trasformano nelle:

$$(PX' + QY' + RZ')(X^2 + Y^2 + Z^2)$$
$$- (PX + QY + RZ)(XX' + YY' + ZZ') = 0,$$
$$(XP' + YQ' + ZR')(P^2 + Q^2 + R^2)$$
$$- (PX + QY + RZ)(PP' + QQ' + RR') = 0.$$

le quali moltiplicate ordinatamente per ;

$$\frac{\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}}{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}}, \quad \frac{\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}}{\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}}$$

e sommati i risultati danno la :

$$\left[\frac{PX + QY + RZ}{\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}}\right]' = 0,$$

quindi integrando ec.

Questo teorema è una delle questioni proposte nel fascicolo del novembre 1852 dei « Nouvelles Annales de Mathématiques. »

Teor. 2.° Supposto che due superfici si seghino lungo la linea di comune intersezione sotto un angolo costante, se questa linea sarà linea di curvatura per l'una delle superfici lo sarà anche per l'altra.

Ritenute le stesse denominazioni sussisteranno le tre equazioni

$$Xx' + Yy' + Zz' = 0, \quad Px' + Qy' + Rz' = 0,$$
$$\frac{PX + QY + RZ}{\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}\sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}} = h$$

h costante. Derivando la terza di queste si giunge facilmente alla

$$(X^2 + Y^2 + Z^2) [(YR - ZQ)(QR' - Q'R)$$
$$+(ZP - XR)(RP' - R'P) + (XQ - YP)(PQ' - P'Q)]$$
$$- (P^2 + Q^2 + R^2) [(YR - ZQ)(YZ' - Y'Z)$$
$$+(ZP - XR)(ZX' - Z'X) + (XQ - YP)(XY' - X'Y)] = 0;$$

la quale per le equazioni (3) assume la forma:

$$(X^2+Y^2+Z^2)\,[x'(QR'-Q'R)+y'(RP'-R'P)+z'(PQ'-P'Q)]$$
$$=(P^2+Q^2+R^2)\,[x'(YZ'-Y'Z)+y'(ZX'-Z'X)+z'(XY'-X'Y)].$$

Da questa equazione osservate le (1), (2) deducesi subito il teorema.

Teor. 3.° Supposto che una superficie venga segata da altre due in modo che le due linee comuni intersezioni sieno per la prima superficie linee di curvatura corrispondenti ad uno stesso punto, ed anche linee di curvatura per la seconda e terza superficie; queste due ultime superficie si segheranno lungo la loro comune intersezione sotto un angolo costante.

Sia

$$\psi(x,\ y,\ z)=0$$

la equazione della terza superficie, e posto

$$\psi'(x)=\text{L},\quad \psi'(y)=\text{M},\quad \psi'(z)=\text{N};$$

pel primo teorema si avranno le:

$$(4)\ \begin{cases} \dfrac{PX+QY+RZ}{\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)}\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}}=h, \\[2ex] \dfrac{LX+MY+NZ}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}}=k, \end{cases}$$

ed indicando con p, q, r le coordinate di un punto della comune intersezione della prima e terza superficie pel dato teorema sussisteranno le:

$$(5)\qquad \frac{p'}{YN-ZM}=\frac{q'}{ZL-XN}=\frac{r'}{XM-YL}$$

$$p'x'+q'y'+r'z'=0.$$

Quest'ultima equazione osservate le equazioni (3), e le (5) diventa:

$$(PL + QM + RN)(X^2 + Y^2 + Z^2)$$
$$- (PX + QY + RZ)(LX + MY + NZ) = 0.$$

e quindi per le equazioni (4) :

$$\frac{PL + QM + RN}{\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}} = hk .$$

Come corollario di quest'ultimo teorema e del teorema 2.° si ha evidentemente:

Teor.ª 4°. Supposto che una superficie venga segata da altre due in modo che le due linee comuni intersezioni sieno per la prima superficie linee di curvatura corrispondenti ad uno stesso punto, ed anche linee di curvatura per la seconda e terza superficie, se la linea comune intersezione di queste due ultime superficie sarà linea di curvatura per una di esse lo sarà anche per l'altra.

Dal 1°. e 2°. teoremi si deducono anche i seguenti:

Teor.ª 5.° Se le linee comuni intersezioni di tre superfici saranno a due a due linee di curvatura per le superficie stesse, lungo quelle linee le superfici si segheranno sotto angoli costanti.

Teor.ª 6.° Se tre superfici si segheranno due a due lungo le linee di comune intersezione sotto angoli costanti, e le linee di comune intersezione fra la prima e seconda superficie, prima e terza, seconda e terza saranno ordinatamente linee di curvatura per la prima, per la terza, per la seconda superficie, lo saranno anche per la seconda, per la prima, per la terza superficie.

Teor.ª 7.° Se le linee comuni intersezioni di tre superfici saranno due a due per ciascuna superficie linee di massima e di minima curvatura corrispondenti al loro punto comune; quelle superfici saranno ortogonali.

Indicando con l, m, n, le coordinate di un punto della comune intersezione della seconda e terza superficie si avran-

no le equazioni:

$$Xx'+Yy'+Zz'=0,\quad Xp'+Yq'+Zr'=0,\quad Pl'+Qm'+Rn'=0,$$
$$Px'+Qy'+Rz'=0,\quad Lp'+Mq'+Nr'=0,\quad Ll'+Mm'+Ln'=0.$$

$$\frac{PX+QY+RZ}{\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)}\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}}=a,$$

$$\frac{LX+MY+NZ}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}}=b,$$

$$\frac{LP+MQ+NR}{\sqrt{(L^2+M^2+N^2)}\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)}}=c,$$

a, b, c costanti;

$$p'x'+q'y'+r'z'=0,\qquad l'x'+m'y'+n'z'=0,$$
$$l'p'+m'q'+n'r'=0.$$

per queste equazioni rammentato il teorema 3,° si avranno le :

$$a=bc,\qquad b=ac,\qquad c=ab$$

unica soluzione delle quali è la $a=b=c=0$, trascurandosi la $a=b=c=1$ per ragioni facilmente vedute. Dunque si avranno le :

$$PX+QY+RZ=0,\quad LX+MY+NZ=0,$$
$$LP+MQ+NR=0;$$

ossia le tre superficie sono ortogonali.

SULLA INTEGRAZIONE DELLA EQUAZIONE DELLE GEODETICHE.

NOTA

DEL MEDESIMO

La equazione della geodetica per una superficie qualunque sotto la forma assegnatagli da Gauss è la seguente:

$$(1) \qquad \theta' = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{dE}{dv}u' - \frac{dG}{du}v'\right)$$

supposte le linee $u = \text{cost}^e$, $v = \text{cost}^e$ essere ortogonali;

$$E = \left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2, \quad G = \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2$$

e θ l'angolo che la geodetica fa colla linea $v = \text{cost}^e$. Gli accenti indicano derivate rispetto ad una variabile qualunque, la quale riterremo essere l'arco della geodetica. Dalle note equazioni :

$$(2) \qquad \cos\theta = u'\sqrt{E}, \qquad \text{sen}\theta = v'\sqrt{G}$$

si ottiene la :

$$\text{sen}\theta\cos\theta = u'v'\sqrt{EG},$$

per la quale la (1) si muta nella:

$$2\text{sen}\theta\cos\theta.\theta' = u'v'\left(\frac{dE}{dv}u' - \frac{dG}{du}v'\right)$$

e per le (2) nella :

$$(3) \qquad 2\text{sen}\theta\cos\theta.\theta' = \frac{1}{E}\,\frac{dE}{dv}\,v'\cos^2\theta - \frac{1}{G}\,\frac{dG}{du}\,u'\text{sen}^2\theta .$$

Sotto questa nuova forma la equazione della geodetica si presta facilmente all'integrazione in molti casi. Se supponiamo $E = G = \lambda$ oppure $E = \lambda\varphi(u)$, $G = \lambda\psi(v)$; essendo λ una funzione di u, e di v ; si avrà :

$$2\lambda\,\text{sen}\theta\cos\theta.\theta' = \frac{d\lambda}{dv}v'\cos^2\theta - \frac{d\lambda}{du}u'\text{sen}^2\theta$$

e supposto $\lambda = \alpha(u) + \beta(v)$ si ha :

$$\alpha'(u)u'\text{sen}^2\theta + 2\alpha(n)\,\text{sen}\theta\cos\theta.\theta'$$
$$+ 2\beta(v)\,\text{sen}\theta\cos\theta.\theta' - \beta'(v)v'\cos^2\theta = 0,$$

che integrata dà :

$$\alpha(u)\,\mathrm{sen}^2\theta - \beta(v)\cos^2\theta = a$$

a costante. In questo caso sono comprese le integrazioni dell'equazione della geodetica sulla sfera, sull'ellissoide ec.

Supponiamo che le linee per le quali v =cost^e. Sieno linee geodetiche ; si potrà porre $E = 1$, e la equazione (3) diventa la :

$$2\mathrm{cotang}\,\theta.\theta' + \frac{1}{G}\frac{dG}{du}u' = 0\,.$$

osservando essere :

$$G' = \frac{dG}{du}u' + \frac{dG}{dv}v'$$

se ritiensi G funzione della sola variabile u si avrà :

$$2\mathrm{cotang}.\theta.\theta' + \frac{1}{G}G' = 0\,,$$

che integrata dà :

$$G\mathrm{sen}^2\theta = A.$$

A costante. Questo caso comprende le integrazioni dell'equazione della geodetica sulle superfici di rotazione, sull'elicoide gobba, ec.

Pavia 22 marzo 1853.

LETTERA
DEL SIG. PROF. F. MOSSOTTI
AL COMPILATORE

Sig. Professore

Sono indotto a scrivergli questa lettera da una Nota letta dal Chiariss. Sig. Prof. Bellavitis all'Istituto Veneto, pubblicata negli Atti di quella Società, e dal medesimo gentilmente trasmessami. In questa nota viene di nuovo messa in campo la teoria del movimento azzimutale del piano d'oscillazio-

ne del pendolo di Faucoult, per cui credo a proposito di comunicargli alcuni risultati conseguiti con un lavoro che ho portato a termine da alcuni mesi, ma che non ebbi ancor tempo di compilare per pubblicazione.

Nell'aprile del 1851, allorchè l'esperimento del Sig. Faucoult era ancora una novità in Italia, interrogato 'dal Prof. Serpieri sulla spiegazione di alcune particolarità di quest'esperimento gli risposi con lettera che vidde in parte la luce ne'suoi pregievoli Annali (*), nella quale dimostrai che, quando il pendolo parte dalla verticale, il suo piano d'oscillazione deve avere rispetto ad un verticale terrestre un movimento dal sud verso l'ovest con una velocità angolare espressa dal prodotto della velocità angolare, n, della terra pel seno della latitudine, γ, del luogo dell'esperimento, cioè da $n\sin\gamma$. La supposizione che il pendolo parta dalla verticale, passante pel punto di sospensione, riduce l'esperimento alla sua purità, isola cioè l'elemento che si vuol prendere in considerazione, che è il movimento di rotazione dell'orizzonte, dagli altri elementi che possono complicarlo. La difficoltà però di mettere il pendolo in movimento, imprimendo al suo centro d'oscillazione una velocità in un piano verticale passante pel punto di sospensione, senza alterazioni di sorta, ha fatto sì che gli sperimentatori s'appigliassero piuttosto al mezzo d'allontanare il pendolo dalla verticale per indi abbandonarlo a se stesso. Impiegando questo mezzo s'introduce un'altro elemento, il quale si è che nell'atto che il pendolo parte dalla quiete apparente possiede in realtà una velocità di rotazione intorno alla verticale, passante pel punto di sospensione, espressa da $ln \sin\gamma \sin\alpha_0$; l dinotando la lunghezza del pendolo ed α_0 l'angolo di cui è stato deviato al principio del movimento. La distanza a cui si spostano comunemente i pendoli dalla verticale nei detti esperimenti es-

(*) Annali di Scien. Matem. e Fis. Tom. II, Maggio 1851.

sendo piccola, ed il valore di n per un secondo di tempo medio essendo espresso, in parti del raggio delle tavole, dalla frazione 0, 000072921, la detta velocità risulta assai tenue, ed il suo effetto può riguardarsi, con vocabolo astronomico, come una piccola perturbazione del moto che avrebbe il pendolo senza di essa. Ciò non pertanto come il P. Secchi fece conoscere, qualche tempo dopo ch' ebbi scritto la citata lettera, delle pregevoli esperienze che dimostravano delle anomalie nel movimento del pendolo, mi venne la curiosità d'indagare sino a qual punto la detta velocità iniziale del medesimo intorno alla verticale, la diversità d' azzimut in cui è posto in moto e la resistenza dell' aria potessero modificare i risultati ottenuti nel caso semplice considerato prima. Poichè i calcoli necessarii alla soluzione del problemba in questo secondo caso sono stati dallo stesso Sig. Prof. Bellavitis riputati difficili, ed in vero, quantunque non presentino difficoltà speciali d'integrazione, esigono però d'essere condotti con un certo tatto per arrivare, senza complicazioni, a riconoscere il movimento del pendolo dopo un numero indefinito d' oscillazioni, mi sono determinato a far subito noto i principali risultamenti ottenuti.

Ciò che mette una differenza analitica nelle equazioni differenziali spettanti alle oscillazioni del pendolo di Faucoult nei due modi di porlo in moto, si è la presenza di una costante arbitraria. Nel primo modo questa costante è nulla, e l'angolo θ (*), il quale esprime l'azzimut della projezione orizzontale del pendolo rappresenta anche la direzione del piano d'oscillazione perchè essa rimane piana : nel secondo

(*) Vedi il citato fascicolo di Maggio pag. 235, equazione ultima. In quest' equazione l'angolo θ può anche intendersi riferito ad una linea orizzontale, che non partecipi della rotazione dell'orizzonte intorno alla verticale ponendo in essa $-nt \sin\gamma + \theta$ in luogo di θ. Vedi anche la nota alla XX Lezione pag. 242 della Meccanica razionale in corso di stampa.

modo la detta costante ha un piccolissimo valore , e quantunque l'oscillazione sia ancora sensibilmente piana, pure la projezione del pendolo, non divenendo mai matematicamente nulla la sua estremità esteriore viene a descrivere una curva che non passa più per la verticale del punto di sospensione, e l'angolo θ compie all'incirca, nel tempo di una doppia oscillazione, un'intera rivoluzione intorno alla detta linea.

Cercando l'espressione di quest'angolo ho trovato che nell'intervallo del tempo T in cui la distanza del pendolo dalla verticale passa da un valor massimo al successivo è data da

$$\pi - \left(\sin\gamma - \frac{3p\sin\alpha}{8}\right) n\mathrm{T}$$

il valore di $p \sin \alpha$ essendoci porto da

$$p \sin\alpha = \left[\sin\gamma \sin^2\alpha_0 + \frac{2}{3}\cos\gamma \sin\varepsilon \sin^3\alpha_0\right] e^{-(\mu\Theta + \nu S)}$$

nella qual formola α_0 denota l'angolo che il pendolo fa colla verticale al principio del movimento, ε l' azzimut del piano verticale in cui il medesimo è stato rimosso , valutato dal punto ovest verso il punto sud : i coefficienti μ e ν sono quelli della resistenza dell'aria supposta espressa da due termini, uno proporzionale alla velocità semplice l'altro al quadrato, Θ rappresenta il tempo decorso dal principio del movimento sino a quello dell'oscillazione che si considera , ed S lo spazio percorso dal pendolo espresso in parti della sua lunghezza, ossia per approssimazione la somma di tutti gli archi che misurano le amplitudini delle oscillazioni descritte.

L'effetto della resistenza dell'aria rappresentato dal fattore esponenziale è di far diminuire il valore di $p \sin\alpha$ ad ogni nuova oscillazione. Trascurando quest'effetto, il termine $p \sin \alpha$ conserverebbe in tutto il tempo dell'esperimento il valor massimo che compete al caso della resistenza ; ciò non ostante, supponendo, come nell' esperienza del P. Secchi del

giorno 7 maggio 1851 (*),

$$\alpha_0 = 0^\circ, 53'. 49'' \ , \ \gamma = 41^\circ, 53'. 52'',$$

il primo termine del valore di $p \sin \alpha$ darebbe, per $5.^{or}\ 6^m.\ 22^s$ di tempo medio che la medesima ha durato, una correzione azzimutale di soli 17″, quantità non discernibile in questa sorta d' esperimenti. Il termine seguente dipendente dal seno dell'azzimut ε sarebbe tuttavia più piccolo e da non tenersene conto, per cui si può conchiudere che non vi è differenza notevole nella rotazione apparente del piano d'oscillazione del pendolo nei due modi di metterlo in movimento.

Non istarò a riferire la formola che dà la distanza del pendolo dal punto infimo sulla verticale, in cui rimarrebbe se fosse fermo, nel caso che si tenga conto della resistenza dell' aria, perchè essa è un po' composta. Dirò soltanto che, prescindendo da questa resistenza, le dette distanze sono rappresentate con approssimazione più che sufficiente da

$$\delta^2 = c^2 \cos^2 \frac{\pi t}{T} + \frac{e^4}{2l^2} \sin^2 \frac{2\pi t}{T} + b^2$$

essendo

$$c^2 = a^2 - b^2 \ , \quad a = 2l \sin \tfrac{1}{2}\alpha_0 \ , \quad b = \frac{lp \cos \frac{1}{2} \alpha}{\sqrt{g}}$$

per cui a è la massima distanza a cui giunge il pendolo dalla verticale e b la minima, come è facile da verificarsi. Calcolando il valore di b pel citato esperimento, in cui vi aveva $l = 31950^{mm}$, $g = 98942^{mm}$, risulta $b = 0^{mm}, 035$, cioè trentacinque millesimi di millimetro. Siccome questo valore è altresì, con grandi prossimità, al vero quello della più gran distanza del pendolo dal piano passante per la linea

(*) Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Anno IV. Maggio 1851 pag. 332.

degli apsidi, così si vede che ogni sua oscillazione può aversi per piana. La resistenza dell'aria facendo diminuire l'amplitudine delle oscillazioni fa pure decrescere il valore della distanza in discorso.

Mi è piaciuto di riferire questi risultamenti per prevenire i lettori, che la differenza delle formole che danno il valore della derivata $\frac{d\theta}{dt}$ nei due modi di mettere in moto il pendolo, e sulla quale s'aggirano le dette considerazioni del Sig. Prof. Bellavitis, quantunque sia notevole per l' analisi, non trae, nelle esperienze ordinarie, un cambiamento sensibile sul movimento che ne segue. Ciò era anche presumibile quasi senza calcolo, osservando che il pendolo, per esempio del P. Secchi, partendo colla velocità che ha nell'istante in cui viene abbandonato, verrebbe alla metà della prima oscillazione a passare a lato della verticale, corrispondente al suo punto di sospensione, ad una distanza certamente $< 0^{mm}, 055$ (*), e che da quest'istante il suo movimento deve verosimilmente confondersi, entro stretti limiti, con quello d' un altro pendolo eguale che parta contemporaneamente colla medesima velocità dalla verticale stessa.

Pisa li 16 Marzo 1853.

SULLA COMPILAZIONE DI UNA CRONOLOGIA STORICA DEI FENOMENI STRAORDINARJ DI METEOROLOGIA E DI FISICA TERRESTRE

MEMORIA

DEL SIG. F. PISTOLESI

La Cronologia storica dei fenomeni straordinarj di Meteorologia e di Fisica terrestre presenta doppio interesse, cioè l'interesse storico e l'interesse scientifico.

(*) È il valore di $\frac{1}{2}$ $ln \sin \gamma \sin \alpha$.

L'interesse storico non può essere soddisfatto pienamente, perchè molti dei fenomeni hanno avuto ed hanno luogo in parti della terra prive di abitatori nel mare, e perchè della porzione maggiore di tali fenomeni non venne preso ricordo. Questi due incidenti sono per altro in via di diminuzione, attesochè ogni dì più si popola di abitatori la terra, e la cultura come l'istruzione sono in progresso.

Sprone a notare i fenomeni di cui parliamo è l'interesse scientifico, vale a dire il desiderio che abbiamo di spiegarli e di darne la teorìa (*).

Per raggiungere pertanto l'intento di far conto è di prender ricordo dei fenomeni straordinarj di meteorologia e di fisica terrestre, onde pervenire alla teoria loro, non àvvi mezzo più efficace di quello di compilare la Cronologia storica dei fenomeni dei quali è stata in qualsiasi modo presa ricordanza. Questo lavoro, col popolarizzare in certa guisa l' interesse verso lo studio di essi fenomeni moltiplicherà gli osservatori; ed i materiali, per i tempi avvenire, si aumenteranno in modo di cui non possiamo oggi formarcene idea completa.

Dicemmo che di molti dei fenomeni de'quali l'uomo è stato testimone non fu presa memoria, ed azzarderemo aggiungere che essi sono i più. Ma un numero grande, e superiore ad ogni credenza, è stato notato ; ed i fatti appuntati, ove vengano riuniti, possono al certo formare un' ingente serie da presentare un'inaspettato interesse.

L'oggetto della presente Memoria è di indicare le fonti dalle quali i fatti possono trarsi.

Distribuiremo queste fonti in due classi: 1. i libri a stampa; 2. i manoscritti.

I libri principali da cui desumer si possono le notizie, e quelli nei quali queste si trovano nel loro originale, sono le

(*) Appunto all'eccitamento prodotto dall'interesse scientifico dobbiamo i molti materiali di cronologia meteorologica e di fisica terrestre, che hanno forniti i dotti orientalisti Biot ed Arago.

storie e le cronache. Si grande è il numero di questa specie di opere, che lo spoglio di esse sole basterebbe per la compilazione di una voluminosa cronologia.

Dovranno pure spogliarsi le Cronologie generali e le particolari, gli Annuarj storici, le effemeridi ed anco gli Almanacchi; questi ultimi racchiudono molti fatti dimenticati, e che, senza quelle compilazioni, sarebbero anzi perduti. Le effemeridi poi, avendo per scopo di notare i fatti secondo i giorni in cui sono accaduti, ricordano gli avvenimenti che sogliono per la piccolezza e l'isolamento loro essere trascurati dalle storie e dalle Cronologie (*).

Come un'attinenza delle Storie e delle Cronache rammenteremo le guide e le descrizioni particolari delle città e dei paesi. Pochi saranno fra questo pure estesissimo numero di libri, quelli in cui qualche fatto non possa attingersi, stante che i più trattano pure della climatologia dei rispettivi luoghi che descrivono.

Perciò avranno parimente da consultarsi le opere di geografia tanto generali che speciali, e molte fra le opere di statistica.

I viaggi, segnatamente i marittimi, offriranno ancor essi un numero copioso di materiali.

I giornali periodici o gazzette sono da tenersi per miniere fecondissime di fatti; e tanto più sono importanti questi documenti, in quanto che vi sono esposti quasi sempre in un linguaggio non influenzato dalle teorie scientifiche i materiali speciali dei varj paesi; e quando si tratti di qualche gran fenomeno generale, porgono il mezzo di compilare la storia la più possibilmente completa di esso e del di lui andamento. Indicibile è il numero delle gazzette, e lo spoglio

(*) Cosa degna di imitazione è al certo il decreto emanato nel 1841 dal prefetto della Borgogna, col quale ordinò la tenuta di un registro per notarvi in termini sommarj il racconto di ciascun avvenimento degno di tenersi in memoria (Journal des Débats 20 novembre 1841.)

di esse non è da ritardarsi, onde averlo fatto avanti che accada la facile distruzione di questa specie di fogli volanti, le di cui complete collezioni difficilmente si conservano (*).

Sono poi valutabilissimi i così detti Giornali di commercio, perchè spesso riportano dei fatti meteorologici, come, per esempio, burrasche, naufragi e simili.

Anco i Giornali letterarj propriamente detti sono da percorrersi, i più facendo menzione eziandio di opere attinenti alla fisica ed alle scienze naturali.

Finalmente si consultino i libri chiamati *Selve*, *Opere di varia lezione*, *Zibaldoni*, *Teatri*, ossiano repertorj di più materie.

Fin quì abbiamo parlato di opere che spettano alla storia, alla geografia ed alla letteratura. Diremo adesso alcunchè dei libri riguardanti la fisica da cui si possono trarre i materiali per la cronologia storica da noi conceputa. Si avranno pertanto da consultare:

Tutti i trattati di fisica, niuno escluso, perchè in ciascuno si attingeranno dei fatti.

I trattati generali e speciali di meteorologia, di elettricità e di magnetismo terrestre.

I trattati di geologia e di storia naturale generali e speciali:

Le descrizioni fisiche dei diversi paesi ed i trattati di geografia fisica.

I dizionarj di fisica e di scienze naturali.

I dizionarj enciclopedici, perchè comprendono anche le materie fisiche.

(*) Parlando di *Gazzette*, non intendiamo solo delle gazzette propriamente dette, ma ancora di quei fogli di notizie che si stampavano alla fine del secolo XV. Quelli pubblicati in Germania all' epoca della Riforma danno spesso contezza di fenomeni naturali portentosi. Intendiamo pur dire delle relazioni che in seguito sortirono per semestri. L'opera di Prutz intitolata *Geschichte des Deutchen Journalismus* dà copiose indicazioni dei giornali e fogli volanti della Germania.

Gli Atti delle accademie di scienze.

I giornali scientifici generali (*)

I giornali di meteorologia e di magnetismo terrestre.

Molte delle opere di medicina: in che spesso, e particolarmente nelle topografie mediche, si tratta di climi e di accidenti meteorologici.

I trattati generali e gli speciali di agricoltura.

Le effemeridi meteorologiche, gli Annuarj degli Osservatorj astronomici e simili, le osservazioni meteorologiche già pubblicate e le numerose che si pubblicano oggidì, essendosi ai nostri giorni assai moltiplicati gli Osservatorj di meteorologia e di magnetismo terrestre nelle varie parti del globo, con incarico di fare più esatte e più dettagliate osservazioni sui fenomeni e sulle accidentalità dell'atmosfera, di quello che praticavasi per lo innanzi, con essersi su di ciò anche concertati varj governi, i quali non mancano di prestare la mano.

Ma oltre le rammentate opere, le più complessive, molti dei fatti e dei fenomeni cui miriamo, si hanno in miriadi di produzioni staccate e di operette; alcune riguardanti l'insieme dei diversi fenomeni, altre che trattano di una data specie di essi, e moltissimi finalmente che danno la descrizione particolarizzata di qualche fenomeno speciale. Questa sorte di opuscoli e di produzioni di poca mole sopra argomenti meteorologici o di fisica terrestre è preziosa, giacchè è raro che anche quelle le quali descrivono un avvenimento spe-

(*) A stabilire i fondamenti della meteorologia ancor troppo incerti, è sommamente utile l'esame dei principali fenomeni che vi hanno relazione, accaduti in diversi climi sì fisici che geografici, in comparazione delle giornaliere e periodiche osservazioni le quali si fanno in un dato luogo. A questo scopo tendono principalmente le frequenti notizie di meteorologici avvenimenti con sollecitudine ora registrati in molte opere scientifico periodiche, ed a questo medesimo intento noi pure andiamo raccogliendole. (Giornale di Fisica ec. di Pavia, 1825 p. 151).

ciale non diano qualche notizia di altri fenomeni consimili precedentemente ricorsi.

La bibliografia di queste operette, rare le più per appartenere esse alla così detta Biblioteca volante, sì necessaria al concepito lavoro, e ricchissima al di là di ogni credenza, può solo ottenersi collo spoglio delle seguenti opere:

Dei Cataloghi delle biblioteche pubbliche, delle private, di quelli che furono compilati all'occasione di vendite di librerie, e dei cataloghi dei principali librai.

Delle opere di bibliografia, sì generali che speciali, di cose e di luoghi.

Delle biografie parimente generali e speciali, di scienziati e di eruditi.

Delle storie letterarie e di quelle delle scienze.

Ognuno pertanto comprende quanto enorme sarà per essere il numero dei materiali che attinger si potranno dai monumenti a stampa. Ma pure moltissimi se ne hanno i quali non ricevettero la pubblicazione. Io non parlo della necessità di consultare e di spogliare i moltissimi manoscritti che sono depositati nelle biblioteche pubbliche e nelle private; ma qui mentoverò altre fonti di manoscritti a cui converrà attingere. Sono queste:

I cataloghi e le descrizioni dei manoscritti

Le croniche non pubblicate; esse sono in gran numero, e si hanno quasi di ogni più piccolo luogo.

Gli archivj dei governi, delle comunità, delle corporazioni religiose, ed anco di non poche famiglie (*).

Le osservazioni meteorologiche manoscritte. In ogni luogo è stato o evvi alcuno che prende nota degli avvenimenti fisici.

I registri mss. delle osservazioni meteorologiche già pub-

(*) Per dare un'idea della vastità del campo esplorabile degli archivj, basti l'indicare che il solo archivio generale dei Frari in Venezia contiene la quasi favolosa cifra di quattordici milioni di volumi distribuiti in trecento locali.

blicate. Questi registri sogliono contenere varj appunti e ricordi, dei quali non è stata fatta alcuna comunicazione al pubblico, sistema da cui modernamente siamo più o meno declinati. E si consultino segnatamente i registri tenuti negli osservatorj, perchè sono i più esatti. Nè si lasci di spogliare anche le stesse osservazioni astronomiche (*).

I registri del tempo che sogliono essere tenuti negli uffizj dei porti: potrà in essi raccogliersi un gran numero di fatti, tanti sono questi uffizj.

I deposti che si fanno dai capitani e dai padroni dei bastimenti presso gli uffizj di sanità al loro arrivo nei porti. Si rinverranno molti fatti, ed i più preziosi perchè accaduti in mare, e però facilmente fuori della portata di esser notati.

I così detti giornali dei bastimenti, ove questi siano stati conservati dai particolari (**).

I rapporti giornalieri che dai ministri della polizia si fanno ai governi, i quali rapporti hanno molti fatti, che senza quella occasione anderebbero perduti.

I ricordi che sogliono tenersi da coloro che soprintendono ai giardini botanici e di orticultura.

Nelle varie fonti si incontrerà più volte uno stesso fatto; ma le diverse descrizioni di un fatto servono mirabilmente a procacciarne la storia vera e completa.

Ecco quanto occorre fare per pervenire alla compilazione di una *Cronologia storica dei fenomeni straordinarj di meteo-*

(*) Sino dal 1806 serbavansi scritte nel margine dei libri delle osservazioni astronomiche (fatte a Bologna) alcune ricerche dell'atmosfera . . . (Palagi, Primo decennio, Bologna 1850.)

(**) Negli uffizj dei ministeri della marina vengono depositati conservati i numerosi giornali dei bastimenti che navigarono per conto del governo. Tutti questi registri, che formano altrettante storie o croniche fisiche del tempo, sono inediti, non esclusi anco per la massima parte quelli relativi a viaggi di cui è stata fatta la pubblicazione.

rologia e di fisica terrestre, lavoro ingente, che non saprebbe be commettersi, perchè di troppe forze riunite e di troppi individui abbisogna. L'averlo accennato speriamo che non sia per essere senza qualche utilità. Ma gli avanzamenti continui che si fanno dalle scienze, l'incremento della civiltà, il divenire ognor più popolari le cognizioni della fisica, e le moltiplicate pubblicazioni delle effemeridi meteorologiche, confortano e rassicurano che col tempo sarà per raggiungersi l'importante scopo del quale abbiamo qui tenuto parola.

DI ALCUNI NUOVI ESPERIMENTI DEL DOTT. ALESSANDRO PALAGI DI BOLOGNA

Sulle variazioni elettriche a cui vanno soggetti i corpi scostandosi dal suolo o da altri corpi, ovvero accostandosi ad essi.

RICORDO

DEL DOTT. CARLO GRILLENZONI

Estr. dalla GAZZETTA MEDICA ITALIANA — *federativa — Toscana — Tom. III, Ser. II.*

Mercoldì 5 gennajo 1853 sulla terrazza della Specola dell'I. R. Museo di Fisica e Storia Naturale di Firenze, il Sig. Alessandro Palagi di Bologna, Dottore in matematica e medicina, alla presenza de'Professori Amici, Bufalini, Taddei, Parlatore, Ranzi, Politi, Ghinozzi, Dott. Donati, Avv. Berti e Pedrini di Bologna, Ingegnere G. Berti di Bologna ed altri, ripeteva alcune sue esperienze, delle quali aveva pur dato saggio in Pisa sugli ultimi giorni del caduto anno alla presenza de' Prof. Matteucci e Puccinotti, del M. L. Tanari e Prof. Rossi di Bologna. Importerebbero tali esperienze la scoperta di un nuovo processo di elettrizzazione, e della esistenza ne'corpi di una proprietà generale fin quì non avvertita, la quale sarebbe questa: che *tutti i corpi in istato naturale danno segno di elettricità vitrea tosto che vengono a scostarsi dal suolo o da altri corpi, e danno segno di elettricità re-*

sinosa quando al suolo o ad altri corpi si avvicinino, con una tensione proporzionata allo spazio interposto.

Posciachè Beniamino Franklin nel 1752 ebbe fatto conoscere come nel levarsi a molta altezza nell'atmosfera un aquilone volante munito di punte metalliche si caricava di elettricità, molti fisici, fra'quali sono a ricordarsi principalmente il Saussure e l'Hermann, adoperarono ogni ingegno e diligenza per certificarsi delle condizioni elettriche dell' atmosfera a diverse altezze. E ripetendo appunto le esperienze del Saussure e dell'Hermann nel 1842 il Sig. Peltier di Parigi potè osservare che, quando in una giornata serena in luogo aperto ed alto egli innalzava per 4 o 5 decimetri il delicato elettrometro, che da lui prese il nome, l' indice del medesimo dava segni di tensione vitrea, la quale scompariva tosto che riponesse l'elettrometro al posto da cui era cominciato l' innalzamento. Ed osservò ancora che , portando da tal punto l'elettrometro verso terra, si ottenevano segni di tensione resinosa , i quali medesimamente scomparivano col rimettere l'istromento al posto di prima. Di che il fisico Parigino giudicava che tali fenomeni procedessero da influenze esercitate sull'elettrometro dalla diversa elettricità posseduta dai vari strati di aria, nei quali, quanto più siano lontani dalla terra, scaturigine perenne (secondo le sue dottrine) di elettricità resinosa , tanto maggiore deve apparire la tensione vitrea, e viceversa.

Similmente il Dott. Palagi ripeteva sui primi del 1852 gli sperimenti del Peltier nella Specola dell' università di Bologna, ma trovando necessario di variarne il modo per assicurarsi di una precisione maggiore nelle sue osservazioni, gli parve di poterla ottenere col lasciare l'elettrometro al suo posto, mentre egli innalzava ed abbassava con apposito meccanismo isolatore una palla metallica in comunicazione per lungo filo coll'elettrometro stesso. Per meglio certificarsi poi della qualità del fluido elettrico, di cui l'elettrometro misurava

la tensione, univa all'istromento del Peltier il sensibile elettroscopio od elettrometro del Bohnenberger a pile secche dello Zamboni. E così operando potè verificare che le manifestazioni di una elettricità contraria si ottenevano all'elettroscopio appena il corpo che si era innalzato cominciava a discendere verso il punto da cui prima erasi mosso, senza che fosse mestieri sorpassare questo punto e da esso procedere verso terra. E poichè molti fatti identici e sempre costanti confermavano tale osservazione, variando ancora a piacere i corpi sui quali sperimentava, si credette autorizzato a ritenere che la elettricità manifestatasi all' elettrometro non abbia alcun rapporto diretto colla elettricità propria dei varii strati di aria, ma debba riguardarsi come semplice e naturale effetto dello scostarsi di quei corpi dal suolo, o dell'avvicinarsi al medesimo.

Dalle prove addotte dal meteorologista Bolognese a dimostrazione del fatto da lui scoperto ed a conferma del suo enunciato esporrò quelle soltanto delle quali io stesso fui testimonio insieme ai dotti uomini dei quali registrai i nomi più sopra.

Posai l'elettroscopio di Bohnenberger sopra una tavoletta di marmo vicino alle stanze dell'Osservatorio, il Dott. Palagi dava principio a'suoi esperimenti, ordinandoli in serie diverse, per modo che ne conseguissero chiare le prove di varie proposizioni, nelle quali si possono compendiare, come in sommi capi, i particolari della nuova scoperta.

Prima proposizione fondamentale: *Un corpo in istato naturale, allontanandosi dal suolo coll'innalzarsi, manifesta segni di elettricità vitrea; e per contrario, avvicinandosi al suolo col discendere, manifesta segni di elettricità resinosa.*

Seguono le prove.

1.° Esperimento. — Posto in comunicazione colla pallina dell'elettroscopio un capo di un lungo filo di rame, tutto dagli estremi in fuori ricoperto di seta spalmata di ceralac-

ca, lo sperimentatore avvolgeva l'altro capo libero del filo sull'estremità di un bastoncello di ceralacca, per isolarlo, e per mezzo di questo lo alzava ed abbassava quanto lo permetteva la lunghezza del braccio. E coll'alternare di questi movimenti si avevano dalla fogliolina d'oro dell'elettroscopio manifestazioni di elettricità vitrea mentre ascendeva l'estremo libero del filo, di elettricità resinosa quando il medesimo discendeva.

2.° Esperimento. — Innalzando con opportuno apparecchio isolatore un altro corpo deferente, nella cui sostanza era insinuata l'estremità libera del filo conduttore in comunicazione coll'elettroscopio, si avevano analoghi risultati, cioé manifestazioni d'elettricità vitrea nell'ascesa, di elettricità resinosa nella discesa, sia che si adoperassero racimoli, o acini di uva, o un cesto d'indivia, o altri corpi deferenti. Che se nel ripetere le prove lo sperimentatore stabiliva comunicazione fra i detti corpi e il suolo, toccandoli con un dito, non avea più luogo all'elettrometro alcuna manifestazione. Laonde parve dimostrato che:

a) *Seguono la legge sopraccennata non solo i corpi metallici, ma ancora qualsivoglia altro corpo deferente.*

3.° Esperimento. — Mossero dubbio taluni se il corpo sul quale si operava potesse mai venire influenzato da elettricità svoltasi per le contrazioni muscolari del braccio dell'operatore. A removere questo dubbio, fatta recare una lunga pertica alla cui cima era una carrucola, e per questa passato un lungo cordone di seta, a un capo del cordone era sospesa un'arancia in comunicazione pel filo conduttore coll'elettroscopio. Sollevate per mezzo del cordoncino l'arancia a qualche metro d'altezza si ebbero assai intensi i fenomeni destati dall'accumulamento dell'elettricità vitrea, e forti similmente i segni della elettricità resinosa tostochè l'arancia dal punto ov'era stata alzata cominciava a discendere verso il suolo.

Ancora si potè notare in questa esperienza, che non va-

riava la intensità dei fenomeni, sia che l'ascesa e la discesa si operassero con celerità, sia che si operassero con grande lentezza per modo da evitare fra il corpo sperimentato e l'aria da esso attraversata ogni sensibile sfregamento,

Lo sperimentatore aggiugneva quindi i seguenti corollarj.

b) *Che gli osservati fenomeni non possono attribuirsi ad influenze elettriche procedenti dalla presenza di elettricità svoltasi per contrazioni muscolari dello sperimentatore.*

c) *Nè possono originarsi dallo sfregamento fra l'aria e il corpo cimentato, poichè il crescere o il diminuire dello sfregamento non muta l'intensità de' fenomeni:*

d) *Nè possono infine riguardarsi come effetto d'influenze esercitate dalla diversa elettricità posseduta dai varii strati atmosferici, secondo che sono più vicini o più lontani dal suolo: poichè alle medesime altezze si hanno segni di elettricità opposte per la sola inversione del movimento.*

e) *La semplice inversione del movimento di ascesa in quello di discesa è valevole a fare scompariro ogni segno di elettricità vitrea, sostituendovi quello del polo opposto , senza bisogno che il corpo sia disceso al punto da cui aveva cominciato il suo innalzamente.*

f) *La intensione dei fenomeni elettrici non ha alcun rapporto manifesto colla ceterità o lentezza della ascesa o discesa del corpo sul quale si sperimenta , ma sembra proporzionarsi allo spazio percorso.*

4.° Esperimento. — Isolatosi lo Sperimentatore col salire sopra un panchettino sostenuto da gambe di vetro, e postosi in comunicazione coll'elettrometro per mezzo del filo conduttore, sul cui estremo libero egli posava un piede, fece vedere come.

g) *Identici fenomeni a quelli sopraindicati si ottengono similmente per l'alzarsi ad abbassarsi di un corpo vivo, e delle sue membra.*

Giacchè la sensibile fogliolina dell'elettrometro segnava im-

mancabilmente la presenza d'elettricità vitrea ogni volta che lo sperimentatore alzava, o sollevava un braccio; di elettricità resinosa ogni volta che operava un moto contrario.

Seconda proposizione. *Nei moti orizzontali i corpi in istato naturale danno segno di elettricità vitrea tosto che si muovano verso uno spazio libero, e di elettricità resinosa, quando si muovano verso uno spazio occupato da altri corpi.*

Ne offriva la prova colle seguenti esperienze:

5.° Esperimento. — Accomodato il capo libero del filo conduttore all'estremità di un bastoncello di ceralacca, come nel 1.° Esp.°, il Palagi tenendo l'estremo del filo conduttore innanzi a se all'altezza del petto fece osservare come, portandolo verso destra o verso sinistra orizzontalmente quanto poteva stendersi il braccio, l'elettroscopio dava segni di elettricità vitrea; dovechè riportandolo verso il proprio corpo si ottenevano segni di elettricità resinosa.

6.° Esperimento. — Isolatosi lo sperimentatore, e postosi in comunicazione coll'elettrometro come nel 4.° Esp.°, nell'istesso modo che aveva fatto conoscere come i fenomeni destatisi per l'innalzamento ed abbassamento delle braccie concordavano perfettamente con quelli che si manifestavano per l'ascendere e discendere degli altri corpi, così ancora fece vedere come spiegando il braccio orizzontalmente a destra ovvero a sinistra verso lo spazio libero si avevano segni di elettricità vitrea, dovechè adducendolo pur sempre disteso e orizzontalmente innanzi a se in modo da formare colla prima direzione un angolo di circa 90°, l'elettrometro segnava elettricità resinosa; poichè con tale movimento la mano si avvicinava allo spazio occupato dal corpo. Invertendo il movimento da questa seconda posizione per ricondurre il braccio orizzontalmente disteso a destra o a sinistra, tornavano i segni della elettricità vitrea.

Ma poichè il Palagi così sperimentando nell'addurre il braccio innanzi a se lo teneva nella direzione del meridiano, per

togliere il dubbio che l'azione magnetica della terra potesse avere alcuna influenza nei resultati dello sperimento, si compiacque ripeterlo volgendosi in tutte le direzioni, nè però variarono i resultati; laonde potè conchiudere che,

a) *Gli accennati fenomeni hanno luogo costantemente in qualunque orientazione.*

Terza proposizione. Dallo studio degli effetti ottenuti pei movimenti verticali e orizzontali, passando a quelli che nascono per moti obliqui, veniva poi dimostrando come:

a) *Non l'innalzamento o l'abbassamento de' corpi verso il suolo è la causa delle contrarie manifestazioni elettriche osservate, ma il semplice atto di scostamento od avvicinamento al suolo o ad altri corpi.*

7.° Esperimento. — Postosi il Palagi sullo sgabello isolatore e comunicando coll'elettroscopio nel modo già più volte significato, ripeteva con pari resultato di prima i varj movimenti delle braccia ottenendo segni di elettricità vitrea nell'innalzarle, e di elettricità resinosa nel portarle verso terra: ma poi, mutando modo agli atti suoi, se nel sollevare il braccio destro lo portava sopra la fronte, l'elettrometro segnava elettricità resinosa: e segnava similmente elettricità resinosa, se alzando le mani verso il cielo nell'atto di chi prega accostava la destra alla sinistra. Per lo contrario quando, lasciando tale atto, discostava le mani portandole a destra o a sinistra lontano dal proprio corpo, la fogliolina dell'elettrescopio dava indizio di elettricità vitrea, benchè le mani si fossero abbassate.

b) *Il fenomeno si verifica similmente nello staccarsi un corpo da un altro, per quando sia tenne il corpo o la parte che se ne stacca.*

8.° Esperimento. — Presa dallo sperimentatore, isolato come sopra, una sorsata d'acqua, incominciò a farla schizzare dalla bocca ad intervalli, e noi osservammo che ogni volta che si partiva dalle labbra di lui uno schizzo d'acqua l'elettroscopio indicava la presenza di elettricità vitrea.

Il medesimo fenomeno si ripeteva ogni volta che lo sperimentatore sputasse, sia che lanciasse lo sputo con forza da se lontano, o che lo spingesse appena tanto che gli dovesse cadere ai piedi: sia che lo sputo fosse grave o tenuissimo.

9.° Esperimento. — Fatto salire uno de'circostanti sullo sgabello isolatore in vece sua, lo sperimentatore non isolato si collocò a piccola distanza dal medesimo.

Così stando, se il Palagi allungando un braccio toccava la persona isolata, questa dava segno di elettricità resinosa; se ne ritraeva la mano, apparivano i segni della elettricità opposta.

Il medesimo avveniva se invece di toccare la persona isolata, egli non faceva che accostarle una mano. E analoghe manifestazioni di elettricità resinosa rendeva similmente l'elettroscopio, se poco dopo avere accostata una mano alla persona isolata, l'esperimentatore le accostava anco l'altra.

Più valida conferma ricevevano pure questi risultati quando lo sperimentatore partendosi dal posto che occupava si allontanava dalla persona isolata, perocchè tosto la fogliolina d'oro appariva caricata di elettricità vitrea; mentre per l'opposto dava indizio d'elettricità resinosa se quegli volgeva i passi verso la persona che stava tuttavia immobile sul suo sgabello.

Chiudeva tale esperimento collocandosi a molta distanza dalla persona isolata in modo da poterla appena toccare coll'estremità di una mazzettina di legno; e l'elettrometro rispose come in tutte le altre prove sopradescritte, coll'indicare elettricità vitrea ogni volta che la punta della mazzettina si allontanava dalla persona isolata; elettricità resinosa ogni volta che la punta della mazzettina la toccava, o anche semplicemente le si accostava.

Sopra il quale esperimento è da avvertire che le manifestazioni resinose apparvero sempre più leggiere delle vitree; differenza che si ebbe luogo di rilevare anche in alcun al-

tro degli esperimenti antecedenti. Per tali fatti si può conchiudere che.

c) *Per ottenere gli effetti elettrici per avvicinamento e scostamento de'corpi non occorre che v'abbia luogo contatto.*

d) *I segni di elettricità resinosa eccitati dall'avvicinamento sono in generale meno intensi di quelli della elettricità vitrea prodotta per lo scostamento, benchè siano uguali le distanze e le superficie nell'un caso e nell'altro.*

QUARTA PROPOSIZIONE. *I corpi coibenti in istato naturale non isfuggono alla legge generale di elettrizzazione, a cui vanno soggetti gli altri corpi nel loro avvicinamento e scostamento reciproco.*

10.° Esperimento. — Interessantissimo fu questo esperimento, dacchè, lasciando da parte i corpi deferenti, lo sperimentatore fece manifesto come neppure i corpi coibenti possono sottrarsi alla legge comune.

Sostituito al primo filo conduttore un altro tutto coperto di seta spalmata di ceralacca, un capo del quale era avvolto intorno allo stelo della pallina dell'elettroscopio e l'altro capo immerso in un globo informe di ceralacca, ripetendo con questo i movimenti che nelle prime esperienze eransi operati con corpi deferenti si ottenevano all'elettrometro analoghi resultati senza bisogno di isolare il corpo ch' era soggetto di prova; talché bisogna anche inferirne che

a) *I corpi coibenti per ciò che sono cattivi conduttori, non hanno bisogno di essere isolati per manifestare i comuni fenomeni.*

11.° Esperimento. — I fenomeni enunciati si confermavano pure costantemente, quando al filo di rame coperto di ceralacca veniva sostituito un cordoncino di seta, ovvero di capelli, sia che si adoperasse per l' esperienza un pezzo di ceralacca o un pezzo di vetro. Laonde s' avrebbe a ritenere che

b) *Di fronte alla universalità della legge accennata nessun corpo si mostra assolutamente coibente.*

12.° Esperimento. — Levati i fili di comunicazione, ed ac-

costato semplicemente alla pallina dell' elettroscopio un bastoncello di ceralacca immantinente ebbero luogo manifestazioni resinose, e allontanandolo manifestazioni vitree. E il simile avvenne operando con un bastoncello di vetro.

c) *I corpi coibenti non isolati manifestano i consueti fenomeni anco senza intermedio di conduttore, approssimandoli e allontanandoli successivamente dalla pallina dell'elettrometro.*

Quinta proposizione. *Se invece di sperimentare con corpi in istato naturale si cimentano corpi già elettrizzati vitreamente i fenomeni elettroscopici si invertono; se si cimentino corpi elettrizzati resinosamente i fenomeni consueti si manifestano con maggiore intensità.*

13.° Esperimento. — Isolata una persona e messa in comunicazione coll'elettrometro, accostandovi un bastoncello di vetro in istato naturale, si hanno indizj di elettricità resinosa; allontanandolo, indizj di elettricità vitrea.

Ma se, caricato di elettricità il vetro, strofinandolo sopra un panno di lana, si accostava anco a distanza all'individuo isolato, l'elettroscopio dava segno di forte tensione vitrea, allontanandolo rendeva i segni contrarj.

14.° Esperimento. — Caricato di elettricità resinosa in simil modo un cannello di ceralacca solo che si accostasse anche a distanza alla persona isolata apparivano segni di elettricità resinosa all' elettrometro; e allontanandolo, sottentravano parimenti intensi i segni opposti.

15.° Esperimento. — Quando poi nel primo caso le prove di scostamento e accostamento del vetro elettrizzato si ripetessero per un certo tempo, i fenomeni sopradescritti apparivano di mano in mano più deboli finché fosse disperso tutto il fluido vitreo accumulatovi sopra; e appena il vetro era tornato allo stato naturale tornavano ancora a manifestarsi nell'elettrometro i fenomeni comuni a tutti i corpi in istato naturale.

Parmi inutile l'accennare che ripetendo la sperienza colla

ceralacca elettrizzata resinosamente, per lo scomparire del fluido accumulatovi, non aveva luogo alcuna inversione di fenomeni, ma semplice indebolimento.

Tali sono i fatti importantissimi di cui il Dott. Palagi cortesemente invitavami ad essere testimonio, e che io consegnai fedelmente in questo scritto. Nè tenterò per mia parte di adombrarne pure una spiegazione, sì per non assumere impresa sproporzionata alle mie forze, e sì ancora per ossequio alla prudente riserva dello sperimentatore medesimo; contentandomi di avere dato opera perchè sia tenuto ricordo di questa nuova scoperta italiana, e porto agli studiosi delle cose naturali materia di nuove indagini, e di serie meditazioni.

N.B. Mentre pubblichiamo l'esperienze del Sig. Prof. Palagi nei nostri Annali siamo assicurati che il Sig. Prof. Paolo Volpicelli sta ripetendole col medesimo il quale portandosi a Roma fù a lui diretto da chiari Scienziati di Bologna. Solleciti del progresso scientifico espressero essi al Prof. Volpicelli il desiderio che il principio elettrostatico del Palagi fosse con ulteriori sperienze confermato e posto in piena luce. *B. T.*

SUL RAGGIAMENTO CALORIFICO DEL SOLE

TERZA COMUNICAZIONE (*)

DEL PROF. P. VOLPICELLI (**)



Continuando queste sperienze, e dando alle sostanze diatermiche la spessezza di circa un centimetro, ho potuto raggiungere gli altri fatti seguenti:

(*) Per la prima communicazione V, Atti dell'Accad. pontificia dei nuovi Lineei sessione VIII del 5 agosto 1851. p. 573, per la seconda v. questi Annali T. III an. 1852. p. 437.

(**) Estratta dagli Atti de'nuovi Lincei Sessione II del 22 Febrajo 1852. An. V.

1.° Il quarzo, ed il vetro ambedue limpidi, sono sostanze le più diatermiche rispetto ai raggi solari, giunti alla superficie terrestre; lo che stabilisce una differenza notevole fra questo raggiamento, e quello delle sorgenti calorifiche terrestri. Da ciò deriva che i refrattori sono idonei a sperimentare la distribuzione del calorico sul disco solare, e che le lenti a scaglioni sono i mezzi più acconci per concentrare il calorico riflesso dalla luna, come già pel primo sperimentò il sig. Melloni, ottenendo felici risultamenti (*). La differenza fra le deviazioni dell'ago del galvanometro, prodotte dal raggio solare libero, e dal medesimo dopo aver attraversate le due indicate sostanze, fu trovata costantemente di un grado, da mezzo dì fino a tre quarti prima del tramonto. Perciò chiamando n il numero dei gradi della prima deviazione, sarà $\frac{n-1}{n}$ l' espressione del potere assorbente, sia del vetro, sia del quarzo, ambedue limpidi. Per tanto se prescindasi dalle riflessioni, che subiscono i raggi nelle due superficie parallele della sostanza diatermica, si può dire che il quarzo ed il vetro, ambedue limpidi, lasciano libero il transito ad ogni specie di raggi calorifici solari, dopo avere questi attraversato l'atmosfera terrestre.

2.° Il sal gemma diminuisce assai la deviazione dell' ago prodotta dal raggio solare libero; perciò questa sostanza, rispetto ai raggi solari, mostrasi meno diatermica di varie altre, e specialmente delle due precedenti; lo che stabilisce un'altra differenza notevole fra questo raggiamento, giunto sulla terra, e quello delle sorgenti calorifiche terrestri per le quali il sal gemma è superiormente diatermico o *trascalescente*. Di più, trascurando le piccole differenze nei risultamenti numerici, le quali potrebbero pure attribuirsi a varie cause perturbatrici, si trova che il sal gemma diminuisce

(*) La Thermochrôse Melloni. — Naples 1850, pag. 251.

sempre circa della metà il raggiamento libero solare, da mezzodì sino a mezz'ora prima del tramonto. Ciò vuol dire che il sal gemma, almeno quello da me adoperato, che proviene da Cardona, ed è sufficientemente limpido, affetta nello stesso modo tutti gli elementi diversi calorifici del sole; per cui rispetto al calor solare giunto a noi, conserva la proprietà, già scoperta nel sale medesimo dal ch. Melloni, di essere cioè atermocroico. Facendo passare il raggio del sole a traverso il sal gemma della spessezza di circa $0^m, 15$, non si aveva deviazione alcuna nell'ago, mentre colla lampada di Locatelli si aveva la deviazione di 1.°

Quindi se il sole, come sembra dover essere, abbiasi per sorgente di ogni sorta di raggiamenti calorifici, possiamo dalle precedenti sperienze confermare, che le atmosfere, una solare, l'altra terrestre distruggono in gran parte quei raggi, che sono abbondanti nelle sorgenti luminose terrestri, e che il celebre fisico Melloni distingue col nome di radiazioni oscure; le quali, secondo le scoperte del medesimo, hanno proprietà specifiche di trasmissione, e diffusione diversissime, da quelle dei raggi di calore lucido.

3.° Vi sono delle sostanze, come il sal gemma affumato, l'allume, il solfato di calce, cristallizzati, ed i vetri colorati, od in bleu, od in verde, ognuna delle quali, stando il sole a diverse altezze sull'orizzonte, riduce le diverse deviazioni, prodotte dal raggio solare libero, ad essere costantemente le stesse, dal meriggio sino a circa tre quarti prima del tramonto. Ciò porterebbe a concludere, che vi sono delle sostanze le quali, rispetto ai raggi solari, hanno il potere assorbente ($= A$) inversamente proporzionale alla energia del raggiamento libero ($= R$) incidente sulle medesime; cosicchè, indicata con C una costante, abbiasi

$$A.R = C.$$

Anche da ciò rilevasi una differenza fra i raggi calorifici

del sole, giunti a noi, e quelli delle sorgenti calorifiche terrestri.

4.° Parecchie sostanze diatermiche, in specie le acroiche, come il quarzo ed il vetro ambedue limpidi, lasciano verso il tramonto il passaggio libero ai raggi solari, cosicchè le deviazioni dell'ago, prima e dopo il passaggio stesso, trovansi presso che identiche. Ciò prova che crescendo la spessezza dell'atmosfera, ed i raggi calorifici solari filtrando per essa, riduconsi tali, da potere attraversare, senz' altra passione, le indicate sostanze; fra le quali annoveriamo anche il vetro rosso.

5.° Unite insieme tre lastre, una di sal gemma, l'altra di allume limpido, la terza di solfato di calce cristallizzato, il raggio solare dopo avere attraversato questo sistema diafano, risulta di luce bianca, *sensibilmente* priva di calorico rispetto al termoactinometro da me adoperato. Ciò prova che le termocrosi diverse dalle *due* lastre, una di allume, l'altra di solfato di calce, si oppongono fra loro: quindi con questo mezzo possiamo affievolire per modo l' effetto calorifico del raggiamento solare, che questo riducasi, pel calorico, al raggiamento lunare, conservando però maggior luce.

6.° Si verifica eziandio nella luce solare, che la copia di calorico passata per più lastre, di natura diversa l'una dall' altra, è indipendente dall'ordine con cui queste sono insieme disposte.

7.° Il raggio solare libero, cioè non obbligato ad attraversare veruna sostanza diatermica, eccetto l'atmosfera, mantiene costantemente la sua energia calorifica, dal meriggio sino verso le tre e mezza dopo; quindi va diminuendo, per tornare poi costante verso i tre qnarti prima del tramonto.



SULLE CURVE PIANE

MEMORIA

DELL' ARCHITETTO SAVERIO MARCHESANO
Alunno della scuola di applicazione ai ponti e strade
di Napoli

Allorchè son date tre curve piane qualunque, e si vogliono esaminare le relazioni tra i loro archi e tra le loro aree il sistema di analizzare può assumersi sotto svariate forme, e condurre tuttavia ad illazioni identiche. Difficoltà non lieve incontrando io nella scelta di quello, dopo di avere in più modi riferiti tra loro i punti di tre curve, uno ne ho trovato con cui sono stato condotto a notabili conseguenze, evitando lunghezza di calcoli. Ho considerati congiunti i successivi punti della prima e terza curva in maniera che le congiungenti fossero parallele a rette che partendo da un punto arbitrario ai successivi punti della seconda divergessero; ma mi sono altresì convinto doversi supporre le prime congiungenti aver rapporto costante alle seconde, come appunto Steiner avea praticato in una simile ricerca (N.° 5). Ho supposto i punti rispettivi della prima e terza curva determinati dall'inclinazione delle tangenti, e così ho esaminate con semplici geometriche vedute le proprietà della seconda curva essendo qualunque l'inclinazione delle tangenti, ed il rapporto costante. I risultamenti ottenuti ho pure confermati coll'analisi che non erasi adoperata così generalmente in questa ricerca. Relazioni tra i tre archi sono contenute nei primi sei teoremi, relazioni tra le tre aree nei quattro ultimi, ed a questi mi ha guidato la sola analisi.

TEOREMA 1.° Se ad una curva A conducasi un qualunque numero di tangenti, ed altrettante se ne conducano ad una seconda curva A′ in modo che siano inclinate alle prime con data legge; se inoltre si congiungano con un punto

fisso ed arbitrario tutti i punti di contatto di A, e pei corrispondenti di A′ si menino rette parallele alle congiungenti ed uguali ad un multiplo costante di esse, ne risulterà dai loro estremi una terza curva A″, di cui un qualunque elemento sarà terzo lato di un triangolo, che ha per altri due lati un'uguale multiplo dell'elemento rispettivo di A, e l'elemento rispettivo di A′, e per angolo opposto l'inclinazione delle tangenti alle stesse curve.

1.° Per ravvisare geometricamente l'enunciato teorema si supporranno rettilinei gli elementi delle tre curve A, A′, A″, e senza tema di errore *si supporranno* coincidere sì cogli archi minimi di cui sono corde, sì colle direzioni delle tangenti; dopo ciò l'enunciata costruzione è manifesta dalla sola ispezione della Fig. 1, in cui

$$abcd\ldots\ a'b'c'd'\ldots a''b''c''d''\ldots;$$

sono le tre curve A, A′, A″, e p il punto fisso.

Intendasi il punto a trasportato in a', e la direzione di ap facciasi coincidere con $a'a''$, sarà

$$a'p = ap,\quad a'b = ab,$$

l'angolo $ba'b'$ l'inclinazione dei due elementi $a'b'$, ab delle curve A′, A; ovvero delle tangenti ai punti a', a. Conducasi per a'' la $a''\beta$ parallela a $b'b''$ finchè incontri in β il prolungamento (se occorrerà) di $a'b$, congiungasi $\beta b'$, si avrà

$$a''a' : pa' :: a'\beta : a'b :: a''\beta : pb$$

ma per ipotesi

$$a''a' : pa' :: m : 1$$

(essendo m il moltiplicatore costante), dunque

$$a'\beta = m(a'b) = m(ab),\quad a''\beta = m(pb).$$

E inoltre per costruzione $b'b'' = m(pb)$, adunque $a''\beta$ è uguale e parallela a $b'b''$, il quadrilatero $\beta a''b''b'$ è parallelogrammo, ed è $\beta b' = a''b''$, cioè l'elemento $a''b''$ di A″ è

terzo lato del triangolo $\beta a'b'$, in cui i due lati $a'\beta$, $a'b'$, e l'angolo $\beta a'b'$ sono quelli da principio enunciati.

2. Il prolungamento delle rette $a'a''$, $b'b''$ .... potrebbe altresì essere in senso opposto, e la curva $a''b''c''$ .... sarebbe situata al di sopra, non venendo meno l' addotta dimostrazione, benchè modificata la costruzione. Fig. 2.

Infatti posto il punto a sopra a', in modo che $ap = a'p$, ed $a'a''$ siano per dritto, sarà $a'b = ab$, bp parallela a $b''b'$. Similmente per a'' si meni la $a''\beta$ parallela a $b''b'$ finchè incontri in β il prolungamento (se necessario) di $b'a$, si avranno simili i due triangoli $a''a'\beta$, $a'bp$, e danno parimente

$$a''a' : a'p :: a'\beta : a'b :: a''\beta : bp,$$

da cui risulta

$$a'\beta = m(a'b) = m(ab), \quad a''\beta = m(bp) = b''b', \quad a''b'' = \beta b',$$

cioè $a''b''$ terzo lato del triangolo $\beta a'b'$, in cui

$$\beta a' = m(ab), \; a'b'$$

sono i rimanenti lati, e l'angolo opposto $\beta a'b'$ è complemento dell'angolo $ba'b'$ delle tangenti.

3. Dinotando con $y = f(x)$, $y' = \mathrm{F}(x')$ l'equazioni di A, A', con ds, ds', ds'' gli elementi ab, $a'b'$, $a''b''$, si avrà per le proprietà anzidette

$$(1) \qquad ds''^2 = m^2\, ds^2 + ds'^2 \mp 2m\, ds\, ds' \cos(\mathrm{B} - \mathrm{C})$$

in cui

$$(2) \left\{ \begin{array}{c} \cos(\mathrm{B}-\mathrm{C}) = \\ \dfrac{1 + \mathrm{tgB}\,\mathrm{tgC}}{\sqrt{(1+\mathrm{tg}^2\mathrm{B})}\sqrt{(1+\mathrm{tg}^2\mathrm{C})}} = \dfrac{1 + f'(x)\,\mathrm{F}'(x')}{\sqrt{(1+f'(x)^2)}\sqrt{(1+\mathrm{F}'(x')^2)}} \end{array} \right.$$

B, e C gli angoli delle due tangenti coll'asse delle ascisse, e varrà il segno superiore o inferiore secondo che i prolungamenti delle rette $a'a''$, $b'b''$ ... fanno tra loro angolo acuto od ottuso, ovvero secondo che si ha la curva A'' come nella Fig. 1, oppure la A''$_0$ come nella Fig. 2.

4. Alle medesime conseguenze si può agevolmente pervenire col calcolo. A tal fine, avendosi

$$(3) \qquad y = f(x) \,, \quad y' = F(x')$$

dinotino u, v le coordinate di $a''b''c''\ldots\ldots$ α, β quelle del punto p. Per essere $a''a'$ parallela ad ap, valendo le stesse distinzioni pel segno, si scorgerà facilmente

$$(4) \qquad m(x-a) = \pm (x'-v) \,, \quad m(y-\beta) = \pm (y'-u) \,,$$

che differenziate danno

$$(5) \qquad dv = dx' \mp m dx \,, \quad du = dy' \mp m dy,$$

Da ciò si ottiene

$$ds''^2 = dv^2 + du^2 = [dx' \mp m dx]^2 + [dy' \mp m dy]^2$$

$$= dx'^2 + dy'^2 + m^2(dx^2 + dy^2)$$

$$\mp 2m\sqrt{(dx^2+dy^2)}\sqrt{(dx'^2 + dy'^2)} \frac{\left[1 + \frac{dy}{dx}\frac{dy'}{dx'}\right]}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}\sqrt{\left(1+\frac{dy'^2}{dx'^2}\right)}}$$

$$= m^2 ds^2 + ds'^2 \mp 2m\, ds\, ds' \frac{[1 + f'(x)F'(x')]}{\sqrt{[1 + f'(x)^2]}\sqrt{[1 + F'(x)^2]}} \,.$$

5. Allorchè è $m = 1$, $B = C$, la (1) dà $s'' = s \mp s'$, proprietà ravvisata da Steiner, ed allora le tangenti alle due curve saranno fra loro parallele.

Nella stessa ipotesi se non è $m = 1$, la (1) darà per gli archi di A'' A''_0

$$s'' = ms - s' \,, \quad s''_0 = ms + s' \,,$$

e sommando e sottraendo

$$s'' + s''_0 = 2ms \,, \quad s''_0 - s'' = 2s' \,,$$

e quindi

TEOREMA II.° Condotte parallele fra loro le tangenti al-

le curve AA', ed ottenute le summentovate curve $A''_0 A''$, la somma di due loro archi rispettivi ha costante rapporto all'arco di A per uno stesso valore di m.

Variando m la detta somma corrispondente ad uno stesso arco di A sarà proporzionale ad m.

La differenza di essi sarà sempre uguale al doppio dell'arco di A'.

Suppongasi per poco

$$\cos(A - B) = m\,\frac{ds^2 + ds'^2}{2ds\,ds'},$$

la (1) dà per l'arco della sola A'', $s'' = \sqrt{(1 - m^2)}\,s'$, laonde si ravvisa il seguente

TEOREMA III.° Premesse le antecedenti nozioni, volendosi prendere le rette che partono dai punti di contatto di A' maggiori dei raggi vettori di A, non esisterà alcuna legge di tangenti, per cui la curva A'' abbia i suoi archi proporzionali a quelli di A', essendo $\sqrt{1-m^2}$ il rapporto.

Non così avverrà se si vuol trovare, per un qualunque valore di m, una curva A'', i cui archi siano proporzionali a quelli di A. Infatti supposto

$$\cos(A - B) = \frac{ds'}{2m\,ds},$$

sarà $s'' = m^2 s$, la relazione tra x' ed x si avrà come qui appresso.

Avendosi

$$\cos(A - B) = \frac{m ds}{2ds'},$$

sarà $s'' = s'$, e dopo avere espresso A, B, ds, ds' per x e x', per mezzo dell'integrazione si avrebbe $x' = \varphi(x, m)$, cioè dovrebbe variare la legge delle tangenti al variare di m, e quindi

TEOREMA IV.° Per ogni valore di m vi sarà sempre uno

o più sistemi di tangenti alle curve A A', per cui gli archi di A'' siano uguali ai rispettivi di A'.

Similmente per ogni valore di m vi sarà sempre uno o più sistemi di tangenti, per cui gli archi di A'' siano proporzionali a quelli di A.

7. Posto

$$\cos(A - B) = 0\,, \quad m = 1\,,$$

dalle (1), (2) si ottiene

$$(6) \left\{ \begin{aligned} & F'(x') = -\frac{1}{f'(x)}\,, \quad ds'' = \sqrt{(ds^2 + ds'^2)} \\ & = dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dx'^2}{dx^2} + \frac{dy'^2}{dx'^2}\,\frac{dx'^2}{dx^2}\right)} \end{aligned} \right.$$

la prima delle quali darà la relazione tra x' ed x, pel cui mezzo si eliminerà x' dalla seconda. In questa ipotesi sarebbe A — B = 90°, cioè le tangenti alle due curve AA' fra loro perpendicolari.

Supponghasi dippiù

$$\frac{dy'^2}{dx'^2}\,\frac{dx'^2}{dx^2} = 2\,\frac{dy}{dx}\,\frac{dx'}{dx}\,,$$

per le precedenti ne risulterà

$$(a) \quad \frac{dy'^2}{dx'^2}dx' = \frac{2dy}{dx}dx = 2dy = \frac{dx^2}{dy^2}dx'\,, \; x' = 2\int\frac{dy^3}{dx^3}dx + C$$

$$(b) \quad ds''^2 = dx\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} + \frac{dy'}{dx}\right)^2\right]} = \sqrt{(dv^2 + du^2)}.$$

Questa ultima condizione non può verificarsi senza che sia l'equazione di A''

$$(c) \quad \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dy'}{dx}\,, \quad \text{ovvero} \quad u = y + x' + \text{Cost.}$$

Le curve che hanno per equazioni

$$(d)\quad y=\frac{\lambda}{n}x^n \;.....\; k-y'=\frac{2^{\frac{n-1}{3n-2}}\lambda^{\frac{1}{2-3n}}(3n-2)^{\frac{2n-1}{3n-2}}}{2n-1}(x'-c)^{\frac{2n-1}{3n-2}}....$$

soddisfano alle condizioni (6) (a).

Da ciò se ne inferisce il seguente

TEOREMA V.° Le due equazioni (d) danno due famiglie di curve, di cui due corrispondenti (AA′) hanno la proprietà che se ad ambedue si conducano tangenti ad angolo retto, la curva A″ ha ciascuna sua ordinata uguale all' ascissa rispettiva di A′, più l'ordinata di A con una costante.

Le curve (d) sono ambedue parabole se è n positivo, e $<\frac{1}{2}$, o $>\frac{2}{3}$.

La prima parabola e la seconda iperbole se è n positiva, e $>\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$.

La prima iperbole, la seconda parabola sempre che n è negativo.

La curva A″ ha per equazione

$$u=y+x'+\text{Cost}=\frac{\lambda}{n}x^n+\frac{2\lambda^3 x^{3n-2}}{3n-2}+\text{Cost}.$$

Meritano attenzione fra le altre

$$yx+\lambda=0\;;\quad k-y'=\frac{-\sqrt[5]{(2500\lambda)}}{3}(x'-c)^{\frac{3}{5}}$$

$$y=3\lambda x^{\frac{1}{3}},\quad k-y'=-3\sqrt[3]{4}\,\lambda(x'-c)^{\frac{1}{3}}.$$

8. Siano ab, $a'b'$ due elementi minimi delle due curve A, A′, p, p', due poli qualunque; pa, pb, $p'a$, $p'b$ congiungano i due poli cogli estremi dell' elemento ab; a'P, a'P′,

$b'P$, $b'P'$ sieno le quattro rispettive parallele, ed $a'a''$, $b'b''$, $a'a_0$, $b'b_0$ le parti in esse che stanno ai raggi vettori di A, come $m : 1$, saranno $a''b''$, $a_0 b_0$ due elementi delle curve A''. corrispondenti ai due poli p, p'.

I quattro triangoli $Pa'b'$, $P'a'b'$, pab , $p'ab$ sono isosceli, perchè le loro basi sono rette infinitesime , e perchè hanno paralleli i lati uguali sono altresì simili il primo ed il terzo, il secondo ed il quarto.

Per la somiglianza dei primi ne risulta

$$a'P : ap :: b'P : bp ,$$

ma per costruzione

$$a'a'' : ap :: b'b'' . bp ,$$

dunque

$$a'a'' : a'P :: b'b'' : b'P,$$

cioè sarà $a'b'$ parallela ad $a''b''$, e per la stessa ragione parallela ancora ad $a_0 b_0$.

Premesse tali considerazioni si ravvisa di leggieri

$$a'b' : a''b'' :: a'P : a'P - a'a'' , \quad a_0 b_0 : a'b' :: b'P' - b'b_0 : b'P',$$

e moltiplicando

$$(e) \quad a_0 b_0 : a''b'' :: a'P\,[P'b' - b'b_0] : b'P'\,[a'P - a'a''] :: \frac{a'P}{b'P'} : \frac{a'P - a'a''}{P'b' - b'b_0}$$

Essendo inoltre simili i due quadrilateri $a'b'PP'$, $abpp'$, perchè composti di egual numero di triangoli simili, e similmente posti, si ha

$$a'P : ap :: b'P' : bp' ,$$

ma

$$ap : a'a'' :: bp' : b'b_0 ,$$

dunque

$$a'P : a'a'' :: b'P' : b'b_0 ,$$

da cui

$$a'P - a'a'' : a'P :: b'P' - b'b_0 : b'P' , \quad \frac{a'P}{b'P'} = \frac{a'P - a'a''}{b'P' - b'b_0}.$$

Ciò mostra che é nella (e) ancora $a''b'' = a_0 b_0$, cioè gli elementi di A$''$ sono uguali e paralleli, e quindi

TEOREMA VI.° Per un qualunque sistema di tangenti menate alle curve A$'$A, e per un qualunque valore di m, ciascuna delle due curve che si ottengono cioè A$''$A$''_0$ si mantiene sempre uguale e parallela a se stessa comunque varii la posizione del polo p.

9. Alle stesse conseguenze si può facilmente pervenire altresì coll'analisi; imperciocchè eliminando x' per mezzo della prima delle (4), e y, y' per mezzo delle (3) dalla seconda delle (4), questa diviene

$$mf(x) = \pm \mathrm{F}\,[(v \mp ma), \pm mx] + (m\beta \mp u)$$

dalla quale si ricaverebbe

$$x = \Psi\,[(v \mp ma)\,, \quad (m\beta \mp u), m]$$

e quindi

$$x' = (v \mp ma) \pm m\Psi\,[(v \mp ma)\,, (m\beta \mp u), m].$$

Sostituendo i differenziali d$'x$ e d$'x'$ or trovati nella seconda delle (b) differenziata cioè in

$$\mathrm{d}(m\beta \mp u) - mf'(x)\mathrm{d}x \pm [\mathrm{F}'(x')\mathrm{d}x'] = 0.$$

si avrà un'equazione della forma

$$\Phi\,[(v \mp ma)\,, (m\beta \mp u), m]\;\mathrm{d}(v \mp ma)$$

$$- \xi\,[(v \mp ma)\,, (m\beta \mp u)\,, m]\,\mathrm{d}(\beta m \mp u) = 0\,,$$

la quale integrata darebbe l'equazione delle curve A$''$A$''_0$ della forma

$$\varphi\,[(v \mp ma)\,, (m\beta \mp u), m] = 0.$$

Questa ci fa conoscere che variando α e β non muta la natura della curva ma si trasporta sempre parallela a se stessa, non così se varia m.

10. Si dinotino con W, w, w', le tre rispettive aree comprese dagli archi delle curve A$''$A$''_0$, A, A$'$, dall'asse dell'a-

scisse e rispettive ordinate, dovrà aversi per le

$$dW = udv = [y' \mp m(y-\beta)] (dx' \mp mdx)$$

$$= y'dx' + m^2 ydx \mp m [(ydx' + y'dx) - \beta(dx' \mp mdx)],$$

Allorchè si ha

$$ydx' + y'dx - \beta(dx' \mp mdx) = 0,$$

cioè

$$\frac{dx}{f(x) - \beta} + \frac{dx'}{F(x') \mp m\beta} = 0. \tag{7}$$

ne risulta puranche

$$W = w' + m^2 w + \text{Cost.} \tag{8}$$

Poichè la (7) è indipendente da α ben mostra il seguente

TEOREMA VII.° Qualunque siano le curve AA' per ciascun valore di m vi saranno sistemi d'inclinazioni di tangenti, a ciascun dei quali corrisponde una retta fissa su di cui facendo comunque scorrere il polo p, tutte le curve simili ad A'', o ad A''_0 hanno costanti le rispettive aree. Dippiù queste sono uguali all'area di A' più quella di A moltiplicata per m^2. Le rette fisse di ciascun sistema sono fra loro, ed all'asse dell'ascisse parallele.

Supponendo $\beta = 0$ la condizione (7) sarà del tutto indipendente da m, e quindi

TEOREMA VIII.° Riferite le curve AA' ad un qualunque sistema di assi ortogonali, vi saranno sistemi di tangenti tali, che scorrendo il polo p sull'asse dell' ascisse, per valori diversi di m si avranno diverse famiglie di curve, e ciascuna di quelle avrà le proprietà del precedente teorema.

11. La (7) integrata da

$$\bar{\omega}(x', x, \beta, \mp m, C) = 0. \tag{9}$$

In questa equazione la costante C può essere qualunque, perchè è sempre soddisfatta la (7), cioè ogni sistema di tangenti può variare accidentalmente in infiniti modi.

Varia la (9) al diverso segno di m, dunque per avverarsi i teoremi precedenti in due curve compagne $A''A''_0$ dovranno aver luogo per ognuna diversi sistemi di tangenti. Variano pure tali sistemi sì al mutare di β che al mutare di m.

Il numero dei sistemi essenzialmente fra loro diversi sarà il numero delle soluzioni reali che ammette la (9). Può in taluni casi non dare che soluzioni assurde, in altri la possibilità dei sistemi è circoscritta da limiti sì per i diversi valori dell'ascisse, sì per i diversi valori della costante C.

Dalle precedenti osservazioni emana il seguente

TEOREMA IX.° Date due curve qualunque AA' e tirata una retta ad arbitrio, in generale esisteranno sistemi di tangenti tali, che facendo scorrere sulla retta arbitraria il polo p le diverse curve A'' o A''_0 avranno le proprietà del precedente teorema.

12. Verificati accuratamente i calcoli si troverà che soddisferanno alla condizione, indipendentemente da x e da x',

$$f'(x) = F'(x'),$$

ed alla (7) le seguenti equazioni

$$(10)\left\{\begin{aligned} & y - \beta - \frac{n+1}{a_1} x^{-n-1} = 0, \\ & y' \mp m\beta + \frac{(n+1)(2n+3)}{a_1} b^{\frac{n+2}{2n+3}} x'^{\frac{n+1}{2n+3}} = 0. \end{aligned}\right.$$

Da questo si deduce che

TEOREMA X.° Le due precedenti equazioni danno due famiglie d'iperboli, o parabole, di cui ciascuna coppia gode della proprietà che menando parallele le tangenti, per questa unica disposizione si avvera per le curve $A''\,A''_0$ quanto si é enunciato nei teoremi VII° ed VIII°. Le due curve di ciascuna coppia (cioè $A'A$) dovranno essere situate in modo da avere i loro assi paralleli.

13. Avverandosi la condizione (7), la (8) può prendere la seguente forma

$$u\mathrm{d}v = y'\mathrm{d}x' + m^2 y\mathrm{d}x = \left(y' + m^2 y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x'}\right)\mathrm{d}x'$$

$$= \left(m^2 y + y'\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x.$$

Per le (5) e (7) si ha poi

$$\mathrm{d}v = \frac{(-y' \mp my)}{y-\beta}\mathrm{d}x = \frac{(y \mp my)}{y-\beta}\mathrm{d}x' .$$

Adunque sostituendo nelle precedenti due equazioni si ottiene

$$u = \frac{\left(y' + m^2 y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x'}\right)(y-\beta)}{y' \mp my}, \quad u = \frac{\left(m^2 y + y'\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x}\right)(y-\beta)}{-(y' \mp my)}$$

equazioni notabili delle curve A″ che soddisfano alla condizione (7).



SAGGIO DI UNA APPLICAZIONE DEL CALCOLO ALLE CORRENTI INDOTTE DAL MAGNETISMO IN MOVIMENTO.

DEL SIG. D.r RICCARDO FELICI

Ciò che segue dovrà considerarsi come un tentativo di spiegazione analitica di alcuni fatti scoperti dal Prof. Matteucci, e che fanno parte di un suo lavoro sull' induzione, che presto sarà pubblicato.

1.° Siano ds e ds' elementi di due circuiti filiformi; voltaico l'uno, l'altro allo stato naturale. r la distanza dei loro due punti di mezzo; k costante. La forza d^2E elettromotrice indotta da ds' in ds, al chiudere del circuito voltaico, verrà in generale espressa da

$$d^2E = -r\frac{d\left(r^k\frac{dr}{ds}\right)}{ds'}ds.ds'. \qquad (*)$$

Se ds' appartiene ad un annello piccolissimo, relativamente alla r, e di un arca Δ, la forza elettromotrice indotta dall' intiero anello si trova essere

$$(1) \qquad dE = -\Delta.\frac{\rho.\cos\lambda}{r^3}ds,$$

ove ρ è la distanza che separa ds dall'asse normale al piano dell'anello, e che vi passa per il centro; λ l'angolo che ds fa colla normale a ρ, contenuta nel piano dell'anello; r la distanza fra ds ed il centro di Δ.

2.° Appartenga Δ ad una calamita verticale e rettilinea,

(*) Vedi l'agosto di questi Annali (1851), il Tomo III degli Annali della Università Toscana, e gli Annali de Physique et Chimie (1852).

o ad un cilindro elettro-dinamico, di sezione Δ, normale ad un sottile piano metallico destinato a ruotare orizzontalmente in presenza della calamita; come si usa nelle esperienze di Arago.

Siano le x, y, orizzontali, ed x, y, z, a, b, c le coordinate di ds e del punto di mezzo di un elemento Δ qualunque della calamita, ossia dell'asse magnetico. ds è in questo caso considerato come un elemento filiforme, rettilineo, appartenente al piano indotto, che coincide con quello delle x, y; avendosi perciò $z = 0$. Se α, β, sono gli angoli di ds con gli assi x, y, e la (1) si trasformerà nella seguente

$$(2) \qquad dE = A\, ds \left(\cos\alpha\, \frac{d\frac{1}{r}}{dy} - \cos\beta . \frac{d\frac{1}{r}}{dx}\right);$$

avendosi

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + c^2.$$

La (2) serve a determinare la curva a cui ds deve appartenere, onde sia nulla, secondo ogni elemento ds della curva stessa, la forza totale indotta dall'intiera calamita, nel caso di una *istantanea calamitazione*, o chiusura del circuito voltaico; oppure nel caso del moto del piano o della calamita.

Chiamerò tali curve *linee di nulla forza elettromotrice*; e supporrò, per semplicità di calcolo, grandissimo il piano metallico, relativamente alla distanza della calamita dall'asse di rotazione, che sarà quello della x.

3.° Il caso di una istantanea calamitazione, o calamita temporaria, e di una sola calamita inducente sarà il più semplice; ed infatti la (2) determina, in tal caso, *linee di livello* tutte le rette che passano per l'asse magnetico.

Il caso di due calamite temporarie corrisponderà a quello della calamita di Poulliet, a ferro di cavallo; posta coi suoi poli in faccia al piano metallico, e chiudendo il circuito della pila.

Supporrò gli assi magnetici di tali due calamite, nel piano che passa per l'asse delle z, e ad ugual distanza dall'asse stesso. Così facendo

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + c^2 ,$$

$$r^2_1 = (x + a)^2 + (y + b)^2 + c^2,$$

ed osservando che in faccia al piano vi siano i poli di nome contrario, avremo, invece della (2) la seguente

$$(3) \quad \mathrm{d}E = - A.\mathrm{d}s \left[\cos\alpha \left(\frac{\mathrm{d}\frac{1}{r}}{\mathrm{d}y} - \frac{\mathrm{d}\frac{1}{r_1}}{\mathrm{d}y} \right) - \cos\beta \left(\frac{\mathrm{d}\frac{1}{r}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}\frac{1}{r_1}}{\mathrm{d}x} \right) \right] .$$

Ora si integri quest'ultima da $c = 0$, a $c = \infty$, nella supposizione che le calamite siano vicinissime al piano, ed abbastanza lunghe per non influire sensibilmente collo loro estremità superiori sul piano stesso. Sarà allora

$$(4) \quad E = \left[\cos\alpha \left(\frac{y - b}{\rho^2} - \frac{y + b}{\rho^2_1} \right) - \cos\beta \left(\frac{x - a}{\rho^2} - \frac{y + b}{\rho^2_1} \right) \right] \Delta \mathrm{d}s$$

ove

$$\rho^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 , \qquad \rho^2_1 = (x + a)^2 + (y + b)^2 .$$

Ponendo

$$\mathrm{d}s.\cos\alpha = \mathrm{d}x , \qquad \mathrm{d}s.\cos\beta = \mathrm{d}y ,$$

e facendo $E = 0$, condizion del problema, si avrà

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2y(ax + by) - b(x^2 + y^2 + a^2 + b^2)}{2x(ax + by) - a(x^2 + y^2 + a^2 + b^2)} .$$

Si faccia $b = 0$, e sarà

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2yx}{x^2 - y^2 - a^2} .$$

Della precedente si trova per integrale

$$y^2 - cy - a^2 + x^2 = 0 ,$$

c essendo un parametro della curva. Il valore precedente di y riducendosi ad

$$y^2 = a^2 - x^2,$$

nel caso di $c = 0$, dimostra che il circolo che ha per centro l'origine, e per raggio la distanza di queste ai poli, è una linea di nulla forza elettro-motrice.

4.° Fatto il caso di una calamita cilindrica rettilinea, la quale rimanendo sempre verticale ruoti in giro intorno all' esse delle z. Oppure, ciò che torna lo stesso, di un disco orizzontale che ruoti intorno a detta calamita supposta immobile.

Se l'asse della calamita coinciderà coll' asse delle z, non si avranno correnti indotte, ma il contrario succederà, se le a, b non sono nulle.

Noi ora dovremo assumere la forza elettro-motrice indotta nell'elemento ds secondo la direzione del detto elemento, per una variazione delle a, b piccolissima proporzionale alla variazione corrispondente sul valore di E dato dalla (4); il qual valore, nel caso di una sola calamita, si riduce al seguente

$$\mathrm{E} = \left(\cos.\alpha \frac{y-b}{(x-a)^2 + (y-b)^2} - \cos\beta \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \right) \Delta ds$$

a e b variando in forza di una ruotazione della calamita, si dovrà fare

$$a = l\cos\varphi, \qquad b = l\,\mathrm{sen}\,\varphi, \qquad l^2 = a^2 + b^2$$

l rimanendo costante. Uguagliando a zero la variazione di E relativamente alla φ, e fattori $\varphi = 0$, si avrà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - (x-l)^2}{2y(x-(l)}, \quad y^2 = -(x-l)^2 + c\,(x-1).$$

Mi limito alla discussione di questi esempj; essi bastano per far comprendere come si possa applicare il calcolo, e

talvolta semplicemente applicare, ad un caso così complicato siccome a prima vista potrebbe apparire. Passiamo ora a vedere come si può sottoporre il nostro calcolo all'esperienza.

5.° Qualunque sia la cagione di una elettrica corrente, deve certamente essere un disequilibrio in un modo (qualunque egli sia) di essere dell'elettrico, che nei diversi luoghi della massa conduttrice ne determina la direzione e la intensità. Ora è noto che nel caso dell' elettricità voltaica, chiamando u quel modo, o stato variabile dell' elettrico, se la u soddisfa alle due equazioni seguenti

$$(5) \qquad \frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=0,$$

$$(6) \qquad \frac{du}{dx}.\cos(N, x)+\frac{du}{dy}.\cos(N, y)+\frac{du}{dz}.\cos(N, z)=0,$$

ove N è la normale alla superficie del conduttore, la prima equazione dovendo aver luogo in generale, e la seconda solamente alla superficie stessa, i risultati del calcolo sono assolutamente d'accordo colla esperienza; assumendo per determinare la forza della corrente che attraversa un luogo qualunque, nella direzione D data dai coseni, $\cos(D, x)$, $\cos(D, y)$, $\cos(D, z)$, la espressione analitica

$$(7) \qquad F=\cos(D, x).\frac{du}{dx}+\cos(D, y).\frac{du}{dy}+\cos(D, z).\frac{du}{dz}.$$

Nelle formule precedenti é supposta costante, ed uguale all'unità, la facoltà conduttrice del corpo.

Con le (5), (6), (7) si dimostra facilmente che in qualunque punto del corpo esiste una direzione nella quale la corrente é massima, e che questa direzione coincide con quella della normale alla superficie di *ugual stato elettrico* che passa per quel punto stesso. Le superficie, o linee, nel caso di due sole dimensioni, di ugual stato elettrico, o *di livello*, si possano agevolmente verificare cogli scandagli di un galva-

nometro delicato, perchè per due punti appartenenti alla stessa linea, deve esser nulla la corrente che volgarmente chiamasi *derivata*. Si prende la corrente derivata proporzionale alla differenza degli stati elettrici dei due luoghi toccati, dalle estremità del galvanometro; infatti, altra condizione non si può ragionevolmente supporre per una corrente qualunque, che un disuguale stato elettrico in due diversi punti del circuito.

Forse le precedenti equazioni essendo (analiticamente osservate) un caso particolare di quelle della Teoria di Fourier sul Calore, molti fisici non avranno voluto intender parola di un modo di calcolare, che poteva essere presentato come una applicazione di quella teoria alla elettricità. Credendo essi che tale combinazione di formule potesse dar appoggio ad una ipotesi di una analogia pressochè completa, od almeno grande, fra il modo di essere dei due così detti fluidi. Ma la corrispondenza completa di quelle formule con la esperienza è un fatto, ormai abbastanza provato; non ci importi dunque di più; teniamoci all'esperienza, essa avrà sempre ragione, e noi pure con lei.

6.° Ritornando al caso nostro assumo il seguente principio il quale avrà bisogno di essere nelle sue conseguenze, discusso dalla esperienza. *Ognuna delle linee, secondo la quale è nulla la indotta forza elettromotrice, sarà pure una linea di ugual stato elettrico, nel caso in cui la forma del corpo non interviene a modificare la direzione delle correnti indotte.* Questo caso si può verificare in due modi; 1.° quando la distanza della calamità del centro di ruotazione è piccolissima, relativamente alla distanza della calamita stessa dai bordi del conduttore; 2.° Quando in tutti i tempi dell'induzione la forma limite del conduttore indotto coincide con quella di una linea *dei massimi flussi*, cioè di una delle ortogonali alle *linee di livello*, nel caso di una estensione infinita.

Col precedente principio si potrà non solo trattare il caso qui specialmente discusso; ma anche, sebbene con maggior difficoltà di analisi, tener conto dell' influenza della forma del conduttore.

7.° Se

$$\psi(x, y, c) = 0$$

c indicando una costante arbitraria è la equazione generale delle linee di livello, si potrà risolvendola rapporto alla c, ottenere

$$c = \varphi(x, y);$$

e considerando nella φ, x, y, come indipendenti si porrà

$$u = f(c).$$

Così la (5) si trasformerà in una equazione assai semplice, che farà conoscere la forma della $f(c)$.

Così nel caso del quarto paragrafo si ottiene.

$$u = -\frac{A}{c} + B;$$

chiamando r la distanza di un punto qualunque del conduttore dalla calamita, ed α l'angolo che la r fa col prolungamento della distanza del centro della calamità da quello di ruotazione si avrà

$$(8) \qquad u = -\frac{A\cos\alpha}{r}.$$

B deve essere nulla, perchè ad $r = \infty$ deve corrispondere $u = 0$.

Tale è la legge, la (8), secondo la quale varia lo stato elettrico del disco ruotante, purchè sia abbastanza grande la distanza della calamita dai suoi bordi.

Nel caso del 3.° paragrafo si troverà, essendo

$$cy = y^2 + x^2 - a^2,$$

l'origine fra le due calamite

$$(9) \qquad u = \frac{A}{2a} \text{ arc tang } \frac{c}{2a} + B$$

ove in forza della condizione che per $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = \infty$ sia $u = 0$, si avrà

$$B = \pm \frac{\pi A}{2^2 \alpha} .$$

Se nella equazione dello stesso paragrafo 3° delle linee di nulla forza elettro-motrice, si cangia $\frac{dx}{dy}$ in $-\frac{dy}{dx}$, e ciò fatto si integra la equazione differenziale che ne risulta, cioè la

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{2yx}{x^2 - y^2 - a^2} ,$$

si otterrà la equazione

$$y^2 + x^2 + a^2 = cx ,$$

che è quella di un sistema di circoli che hanno i loro centri sull'asse delle x; che passa per i poli delle due calamite. Determinando conveniente la c, in funzione della a, metà della distanza delle calamite fra di loro, si troverà la posizione di uno di quei circoli dato che ne sia il raggio. Se ora a quel circolo così determinato, di grandezza e posizione relativamente alle due calamite, si sostituisce un disco metallico, la distribuzione delle correnti e delle linee di livello vi sarà la stessa, come se egli facesse parte del piano infinito conduttore, da noi calcolato. Perciò, con questo artifizio si potrà sottoporre la presente teoria alla esperienza, senza essere costretti a calcolar direttamente la influenza della forma del disco, per cangiare la forma che le correnti indotte prenderebbero naturalmente, in un piano assai vasto, sotto la influenza delle sole calamite.

Il caso generale di un disco ruotante sotto l'azione magnetica, e di grandezza e posizione determinata dipenderà dalla integrazione di equazioni a differenziali parziali, che qui, per ora, non credo di dover riportare; e le linee di *ugual stato elettrico* non corrisponderanno più, in quel caso generale, alle linee di *ugual forza elettromotrice.*

8.° Le linee percorse dalle correnti indotte saranno il sistema delle linee ortogonali alle linee di ugual stato elettrico. Dall'esame puramente analitico delle linee delle correnti indotte si potrà desumere la spiegazione del moto comunicato all'ago dal disco ruotante di Arago. La ragione si è che quelle curve formano dei sistemi affatto uguali fra di loro e disposti simmetricamente, ma colle correnti in direzione contraria, da un lato e dall'altro della linea dell'ago. Si noti che la velocità del disco influisce per alterare tale simmetria, quando la velocità del disco e dello stesso ordine di grandezza di quella colla quale si generano e si estinguono le correnti di induzione. In tal caso la linea di simmetria di tali correnti non coincide più con quella dell'ago.

Da ciò si vede che, per considerare il problema in tutta la sua estensione, conviene tener conto della varia velocità del disco. Ma siccome questa non influisce sensibilmente per la verifica esperimentale dei casi qui discussi, e non può influire se non quando la velocità diventa assai grande, possiamo per ora trascurarne la considerazione. D' altronde ci allontaneremmo troppo dal metodo che ci siamo prefissi, se complicassimo le formule con introdurvi delle condizioni nuove, senza esser certi che le già ammesse sono d'accordo colla esperienza; non faressimo allora che un'inutile sfoggio di formule generali.

9.° Nell'induzione di una sola calamita rettilinea normale, sul centro, di un disco, e toccante quasi il disco stesso, vi sono due casi particolari degni di considerazione.

Quando le correnti sono indotte dalla calamitazione istan-

tanea, il noto calcolo ci dice, determinazione fatta delle costanti arbitrarie delle formule, che la u sarà nulla in ogni luogo del disco. E ciò era prevedibile; giacchè le linee rette che partono dal centro devono essere linee di ugual stato elettrico, e tutto deve esser uguale pei punti equidistanti dalla calamita. Dunque premunendosi dalle correnti indotte sui fili del galvanometro derivatore, non si devono ottenere, in questo caso, correnti derivate dal disco. In questo caso le correnti indotte, le correnti che hanno per causa l'azione magnetica, e non una disuguaglianza *primitiva* di stato elettrico, non potranno cagionare uno sviluppo di quello stato elettrico, il quale nelle altre circostanze, nella pila, è, non il loro effetto, ma la loro causa immediata.

Altro caso è il seguente. È quello in cui detto disco si muove ruotando sotto la calamita. Neppure ora si possono avere correnti derivate, perchè qui mancano anche le indotte; ma si osservi che la formula del paragrafo 7.°

$$u = -\frac{A\cos\alpha}{r},$$

nella quale la A, come si potrebbe dimostrare, deve essere proporzionale alla l distanza della calamita al centro del disco, darà per u dei valori nulli, quando l é estremamente piccola, eccetto per dei punti estremamente prossimi al centro, ove anzi u prenderà valori grandissimi. Ciò ne dice, che quando uno dei scandagli derivatori del galvanometro è nel centro, o quasi al centro, e l'altro in un altro punto qualunque del disco, si otterranno, ruotando il disco, correnti forti per il più lieve valore di l. Se per un piccolissimo difetto di centrazione negli apparecchi il centro del disco ruotasse, p. e. attorno all' asse della calamita, la formula precedente dice che il disco resterà, per quel che potrà risultare nelle esperienze, come diviso in due parti dal circolo in cui ruoterà detto centro; e detto circolo sarà una linea di livello.

Ciò spiega come anche quando l'esperienza è fatta con cura, e gli scandagli sono, l'uno sul centro e l'altro più prossimo al bordo del disco, si presentano delle correnti assai forti al galvanometro, ruotando il disco. Tale fatto mi pare rientrare in quello già noto delle correnti, che si ottengono ruotando una calamita, intorno al suo asse *di figura*, e ponendo detti scandagli l'uno in mezzo l'altro ad un'estremità della stessa calamita. Se non che in questo caso la esperienza è molto più semplice di quella indicata la prima volta dal Faraday.

Tale ultima esperienza mi pare rientrare nella teorica generale della induzione. La prossimità degli scandagli alla calamita, costituiscono, a parer mio, una circostanza al fenomeno. In seguito potrò meglio discutere tal fatto.

RICERCHE SULLA STRUTTURA DELLA PENOMBRA DELLE MACCHIE SOLARI.

DEL P. A. SECCHI

D. C. D. G.

Direttore dell' Osservatorio del Collegio Romano

Le ricerche sul calor solare, mi hanno condotto naturalmente a fare qualche attenzione alle macchie che si presentavano durante le mie esperienze, non solo per esplorarne la temperatura, cui ho trovato decisamente inferiore al resto, ma anche per esaminarne otticamente la loro struttura. Se non che dopo tanti celebri astronomi che se ne sono occupati, con poderosissimi strumenti, e con successo molto mediocre in proporzione della fatica e dello studio fatto, vi era poco da sperare che io con mezzi molto inferiori potessi avere miglior fortuna. Ma nel decorso di queste osservazioni fatte più per curiosità che per altro, venne annunziata la bella scoperta fatta dal Sig. Dawes distinto astronomo inglese, intorno ad un nuovo metodo da lui trovato per osservare il

sole, usando il quale egli avea già veduto diverse cose nuove, ed importanti. Entrai quindi in isperanza di potere ancor io ottenere buoni risultati dal nostro strumento, il quale benchè di forza inferiore al suo, ha però il vantaggio di essere in un clima più puro; e credo di non essere stato deluso nelle mie speranze. Ecco in che consiste la modificazione introdotta dal Sig. Dawes nelle osservazioni solari.

È noto che per osservare il sole coi telescopi, si usa porre avanti alla lente oculare un vetro colorito assai fosco per estinguere la luce troppo viva dell'astro (*): ora usando tali vetri, detti offuscanti o elioscopii, coi grandi cannocchiali, appena è mai che essi non scoppino pel gran calore che concepiscono, onde per evitare ciò è mestieri restringere l' apertura, e così privarsi di uno de'vantaggi principali dello strumento. Il Sig. Dawes ha pensato di porre il diaframma non avanti all'obiettivo, ma avanti all'oculare, e precisamente nel foco comune delle lenti, ove dagli astronomi si sogliono mettere i fili de'micrometri. Questo diaframma consiste in una piastrina forata con un piccolissimo foro da 0, 05 a 0, 001 di pollice; la piastra egli l'ha foderata d' avorio dalla parte rivolta al sole, onde pel suo candore riflettendo i raggi meno si riscaldi.

Applicando così il diaframma all'oculare, oltre il vantaggio di poter godere dell'immagine formata da tutto l'obiettivo, ve ne é un'altro, cioè di restringere assai il campo di vista del cannocchiale, e togliere con ciò dall'occhio dell'osservatore una gran massa di luce che lo impedisce dal ben distinguere gli oggetti difficili. Questo metodo è usato anche in altre osservazioni; p. e. il P. Devico a fine di vedere i debolissimi satelliti di Saturno, usava coprire il pia-

---

(*) I molti lavori del P. Scheiner sulle macchie solari si devono ad un pezzo di vetro turchino che egli possedeva, e che collocava davanti all'obiettivo. Senza ciò le osservazioni non si potevano fare che presso la sera, o a sole mezzo coperto da nubi, e anche col pericolo della perdita della vista, come in fatti successe al Galileo.

neta con una laminetta metallica. Il piccolo apparatino del Sig. Dawes ha dunque un pregio speciale, e doveva sperarsene gran successo nelle osservazioni di questa specie (*).

La maniera che io ho trovato più semplice per la costruzione di questo diaframma, è stata quella di fare una serie di piccoli fori di vario diametro in un cartoncino bianco, quale serve pei biglietti da visita, che essendo molto liscio e coperto di biacca può stare esposto per molte ore ai raggi solari concentrati nel foco dell'obiettivo di Cauchoix di 6 pollici di apertura, senza bruciare, e nè anche riscaldarsi gran fatto. A questo espediente del Sig. Dawes ho congiunto l'uso di un offuscante speciale composto di due prismi di cristallo uno azzurro e l'altro bianco congiunti insieme, e formanti un sol pezzo a facce parallele, che spingendosi più o meno avanti nella sua incassatura, l'occhio ammette quella intensità di luce, che meglio conviene alla distinzione degli oggetti difficili. Questo prisma è molto comodo ma non indispensabile. Per compiere questo cenno sul modo di osservare, dirò che per la piccolezza del campo a cui così riducesi l'oculare, si richiede più fatica nell'osservare cogli strumenti ordinari, ma che comodissime riescono tali ricerche coi montanti equatoriali. Prima di venire ora ai risultati ottenuti dalle mie osservazioni, ricorderò alcuni fatti notissimi agli astronomi intorno alla struttura delle macchie solari.

Quando si guarda una macchia solare di qualche estenzione essa trovasi *ordinariamente* composta di due parti, l'una più oscura, e sensibilmente nera, che dicesi nucleo, e l'altra di una intensità di luce intermedia tra il nero del nucleo e il fondo risplendente del sole, che dicesi penombra.

Il nucleo è sempre separato dalla penombra da una linea decisa di confine, e la penombra pure è separata dal fondo luminoso (o come dicono fotosfera) da un limite deciso e assoluto, senza percettibile sfumatura. Rare volte apparisce la

(*) V. Monthly notices of the R. A. S. april. 7. 1852. Vol. XII pag. 167.

macchia senza la penombra. In generale poi il contorno della penombra segue quello del nucleo. Questa circostanza del limite tagliente che separa le varie parti della macchia, è stato sempre uno dei punti più difficili a spiegarsi, e contro cui siccome a scoglio sono venute a infrangersi quasi tutte le teorie proposte.

Fino dal settembre dello scorso anno io mi rivolsi a ricercare se col nuovo metodo di osservare il sole io avessi potuto riconoscere meglio la struttura delle macchie, e favorito in ciò da una gran copia che si presentarono in quel tempo, riconobbi che la disposizione della materia solare attorno alle macchie, allora esistenti, era ben lontana dall'essere uniforme. La moltitudine delle facole fuori del limite della penombra, ma ad esso vicinissime, era grandissima, e molto più copiosa che nelle altre parti del disco; sicchè poteva concludersi che la perturbazione nell' atmosfera solare che produceva le macchie propagavasi a grande distanza da esse. Queste facole non erano visibili altro che col piccolo diaframma. Le macchie però allora osservate erano di quelle in cui predominava una gran quantità di nuclei, carattere quasi comune di quelle che stanno per isvanire.

Io stava intanto in aspettazione di altre macchie per vedere qualche altra novità, specialmente in quelle che erano formate di fresco, e che d'ordinario sono più o meno circolari.

Sul finire dell'anno scorso, e al cominciar dell'attuale, furono altresì copiose le macchie, e di varie specie, e alcune di queste furono potute seguire per quasi tutto il tempo che restarono sull'emisfero a noi rivolto. Senza star qui a produrre i registri che conservansi all'osservatorio, nè a descrivere per minuto le singole osservazioni, il che non potrebbe farsi senza molti disegni, ridurrò a pochi articoli i punti principali degni di considerazione.

1.° La penombra delle macchie che veduta con deboli ingrandimenti e al modo ordinario appare di tinta uniforme, veduta col piccolo diaframma, e con ingrandimenti di 300

a 400 volte, apparisce sempre di una struttura più o meno radiata. I raggi che la compongono sono curvilinei ed irregolarissimi, ma tutti convergenti al centro del nucleo. Essi lasciano tra di loro intervalli neri più o meno larghi, e giustamente possono paragonarsi ad una moltitudine di minutissime correnti, che separate una dall'altra sembrano confluire in un fondo comune (*).

2.° Ciascun raggio, o corrente isolata considerata da sè, ha una intensità luminosa eguale a quella della fotosfera da cui si stacca. Il contorno del nucleo non è mai una linea continua: ma oltre il contorno generale poligonale, quale scorgesi coi deboli ingrandimenti, veggonsi i singoli lati del suo contorno tutti addentellati minutissimamente; questi quasi dentelli sono formati dalle testate delle correnti, e seguendo il loro corso su per la penombra fino al limite superiore, trovasi che a ciascun minutissimo dentello del nucleo d'ordinario ne corrisponde un altro, benchè men deciso nel confine, tra la penombra e la fotosfera. Alcuni di questi raggi più larghi degli altri si stendono talora attraverso il nucleo, e sembrano dividerlo in due o più parti. Questo è il caso in cui i nuclei appariscono senza penombra di sorte alcuna nei mediocri strumenti.

3.° Ove più correnti o raggi si incrociano nella penombra stessa, ivi cresce la luce, e diviene eguale in intensità al resto del sole.

4.° Nelle penombre molto estese quali sono quelle che seguono come code i nuclei delle macchie che stanno per svanire, i raggi sono moltissimo irregolari, e si intrecciano in mille guise indescrivibili. Non saprei come meglio darne una idea che paragonandole alle onde marine come si dipingono dai pittori, che usano disegnarle con una serie di

(*) Benchè queste correnti le diciamo minutissime bisogna però ricordarci che nel sole l'arco di un minuto occupa una estensione lineare di 27500 miglia romane, il che dà quasi 46 miglia per secondo: ora un tenuissimo filo di ragno sottende da 2 a 3" di arco, e le correnti talora sono più larghe di questa ultima estensione.

linee serpeggianti che corrono parallele per qualche spazio, e poi tutte ad un tratto confondendosi insieme, vengono a formare l'arricciatura del flutto.

Questa struttura radiata della penombra non è del tutto nuova, ne parla il celebre Signor Iohn Herschel nelle sue osservazioni del Capo (*), soggiungendo che tale apparenza è frequente nelle figure di *Pastoroff*, che molto si é occupato di tali ricerche. Pare però che gli astronomi e i fisici vi abbiano fatto poca attenzione, e la considerassero come un caso eccezionale, nè siano mai entrati nei dettagli indicati qui sopra. Nè fa meraviglia; perchè essi sono difficili a vedersi col modo di osservare finora usato, tranne nel caso de'raggi più marcati e grossi. Esigono anche uno stato di atmosfera terrestre assai tranquilla, e certa pratica di osservare, che consiste specialmente in guardare l'oggetto senza tensione dell'occhio. Questa struttura della penombra è però di sommo rilievo per arrivare un giorno a conoscere qualche cosa sulla natura della fotosfera solare. Il fatto che i raggi formanti la penombra veggonsi spiccare dalla parte luminosa del sole, e scorrere verso il nucleo *conservando la stessa intensità luminosa* della massa da cui si staccano, prova che la penombra non è formata di sostanza differente dal resto della fotosfera; ma che il minore splendore che essa ha, deriva principalmente dal trovarsi in essa misti spazi chiari od oscuri, e dall'esser ivi la materia incandescente divisa in varie correnti. Se con minori telescopii, o anche coi grandi, ma guardando coll'usato metodo in cui l'occhio resta abbacinato dalla luce del resto del campo, noi vediamo la penombra di una tinta uniforme; è questo un fenomeno simile a quello che accade guardando a distanza una incisione a bulino, nella quale i tratti neri e bianchi misti insieme formano una tinta o sfumatura intermedia, tra il bianco della carta e il nero dell'inchiostro.

(*) Results of the observations of the Cape of Good Hope, p. 432.

È noto che le grandi macchie al principio della loro apparizione sono d'ordinario pressochè circolari. Spesso allora veggonsi come punti neri o pori in cui la penombra è appena distinguibile. Questo poro si allarga di mano in mano, e apparisce decisamente la penombra, e in questa fase è più perfetto che in ogni altra epoca il parallelismo tra il contorno del nucleo e quello della penombra. Col piccolo diaframma possono vedersi le varie correnti staccatesi dalle parti che sono le più prominenti nel contorno della penombra, avanzarsi bene avanti nel nucleo, e talora due di queste da parti opposte congiungersi insieme, e separarlo in due. Ma quando la macchia ha durato così per qualche tempo, essa si guasta e cessa in gran parte il parallelismo tra i due contorni: la penombra è in generale più ristretta verso qualche parte, che dicesi *precedente* nel moto diurno, e più allungata sulla *seguente*. Nella regione *seguente* soprattutto si manifestano que' gruppi di crespe, che tanto rassomigliano ai flutti di un mare burrascoso (*). Questi fatti provano che non si deve attribuire la penombra ad una seconda atmosfera inferiore alla fotosfera, che divenga a noi visibile quando questa si squarcia, come proponeva W. Herschel (**).

Nella macchia osservata agli ultimi di decembre dell'anno scorso e ai primi di gennaio del corrente, fui molto sorpreso da una apparenza per me allora nuova, ma che poscia ho veduto più volte riprodotta nelle belle figure date da Herschel nell'opera precitata. Veduta in confuso quella gran macchia pareva avere tre o quattro nuclei, ma meglio analizzata col piccolo diaframma essa appariva avere in realtà un solo nucleo principale, ma questo attraversato come da una gran corrente che lo divideva in due: oltre questa vi era un' altro come gran nastro di fuoco che a guisa di cerchio quasi

(*) V. le figure dell'opera di Herschell sopra citata: esse contengono varii casi di queste macchie. Di là può concludersi che in mezzo a tante irregolarità, pure vi sono molte leggi che non tarderanno gran fatto ad essere riconosciute.

(**) V. Outlines of Astronomy n. 389.

completo si stendeva sopra una parte del nucleo e attraverso la corrente precedente: pareva appunto di vedere uno de' grandi crateri lunari in cui fosse illuminata poco più che la metà della corona di montagne che ne formano il ciglio. Tale apparenza durò poco più di 2 ore. Dopo di che guastossi la regolarità della forma, e ne'giorni seguenti la macchia perdette ogni carattere di regolarità.

Confesso che al primo vedere questa corrente di fuoco attraversata dall'altra come da un arco, fui fortemente indotto a dubitare se esse erano realmente nel medesimo piano: però l'apparenza del rilievo che si ha sugli oggetti veduti coi cannocchiali, è troppo spesso illusoria per potere somministrare fondamento di realtà alcuna (*); ciò non ostante io credo cosa importante che si cerchi di comprovare con l'aiuto de'principii di prospettiva, se mai le apparenze di archi siano tali da far credere che le varie correnti non siano nel medesimo piano. Se la materia della fotosfera è gassosa come crede provato il Signor Arago colle sue ingegnose sperienze, nulla è più facile ad intendersi; ma se non lo è, allora riuscirebbe più difficile.

Quantunque l'astronomo debba occuparsi a preferenza di descrivere i fatti, anzichè a cercare le teorie, pure in questo caso è assai difficile disgiungere una dall' altra, e dopo aver richiamato alla attenzione de'fisici i fatti che se non sono al tutto nuovi, non erano però stati mai contemplati sotto il loro vero punto di vista, mi sia permesso di richiamare altresì alla vita una opinione proposta molti anni sono dall'a-

(*) Come esempi di queste illusioni citeremo il fatto delle lettere che scolpite ed incavate in un marmo veduto col cannocchiale astronomico spesso appariscono rilevate; e l' altro fenomeno più comune ancora, e che non può correggersi colla riflessione della mente in modo alcuno, cioè che le prospettive degli oggetti terrestri veduti nel cannocchiale, che pure raddrizza, appaiono rovesciate; cioè che la parte più vicina all'osservatore di due linee parallele pare più stretta, e la più lontana più larga, mentre ad occhio nudo e secondo le leggi di prospettiva dovrebbe essere il contrario. Questo fenomeno è poco conosciuto dai fisici, e non so che ne sia stata data spiegazione alcuna.

stronomo Wilson, per ispiegare la penombra delle macchie solari, ma creduta da alcuni impossibile a sostenersi.

Questo astronomo in una memoria inserita nel tomo LXIV parte I delle Transaz. filosofiche per l'anno 1774, prova ad evidenza che *le macchie solari sono cavità nella superficie solare*. A questo fatto, che è impossibile contraddire egli soggiunge; che molto probabilmente la penombra non consiste in altro, che nelle pareti inclinate di queste cavità, e che essa è formata dalla materia stessa dell' inviluppo luminoso che scorre a riempire il voto formatosi in esso dalla causa che vi produsse la macchia. Egli porta a questo proposito il fatto osservato, che il contorno della penombra segue bensì quello del nucleo, ma in modo che i suoi angoli sono molto più rotondati che non quelli del nucleo stesso: che anzi una volta avendo osservato un nucleo spezzarsi in due, il contorno della penombra non si chiuse facendo un angolo il cui vertice fosse rivolto al nucleo, ma invece si conformò in modo, che esso rivolgeva a questo la sua apertura, quasi indicar volesse, che la materia luminosa per correre a riempire il nucleo si era avallata lateralmente, ed allargata la penombra in quella direzione. Altre prove della sua ipotesi possono vedersi nella sua memoria che meriterebbe esser tutta qui riprodotta. Ma contro questa ingegnosa ipotesi militava sempre una forte obiezzione: come mai la sola inclinazione de'fianchi della cavità potesse produrre una diminuzione così grande di luce, che secondo i risultamenti fotometrici di Herschell è circa della metà? Non appariva possibile che una semplice differenza di livello nelle parti della fotosfera potessero produrre tale effetto. L'obiezione è forte, ed egli stesso se la propone, ma non ne dà valevole soluzione. La forza de' suoi strumenti era incapace di mostrargli la vera struttura della penombra. Egli la supponeva di una struttura uniforme, e noi abbiamo veduto che essa non è tale: ove è penombra ivi è discontinuità, e il nucleo nero visibile senza interruzioni nel centro della macchia, è pure visibile tra gli interstizi lasciati

dalle correnti di materia luminosa che scorrono a riempirne la cavità, e la mescolanza di questi tratti chiari ed oscuri produce la penombra. Questo è puro fatto, così pare a me che resti tolta di mezzo la grande obiezione fatta alla teoria di Wilson. Oltre di ciò possiamo aggiungere che se pure alcuni di tali raggi sembrassero talora meno luminosi della fotosfera ciò potrebbe nascere da più cause 1.° perchè essi potrebbero essere composti di altri filamenti minutissimi a noi indiscernibili, 2.° perchè trovandosi in essi più assotigliata la materia luminosa, se essa ha qualche grado di trasparenza può lasciare vedere attraverso di se il nucleo oscuro. 3.° Perchè essendo le macchie cavità, esse trovansi sottoposte ad uno strato di atmosfera solare più profondo, che per la sua densità può molto indebolire la loro luce, e infatti sappiamo quanto questa sia assorbente.

L'aspetto di correnti che abbiamo veduto assumersi dalla materia della fotosfera potrebbe fare sospettare ad alcuno, che essa debba essere liquida, anzichè gassosa ed elastica, come sembrano indicarla le precitate sperienze del Signor Arago. Quantunque nulla possiamo decidere sulla natura della fotosfera, pure faremo osservare che il fluire della materia luminosa a modo di torrenti verso il centro de' nuclei non induce necessaria conseguenza, che la materia sia liquida, e che il suo scorrere si faccia alla guisa delle lave de'nostri vulcani strisciando sul suolo, nè è necessario ammettere, che le irregolarità de' nuclei al chiudersi delle macchie, nascano solamente dalle irregolarità della superficie solare, benchè queste vi possano contribuire. Infatti nella nostra atmosfera medesima noi vediamo spesso le nubi correre da varie parti dell'orizzonte, e chiudere il cielo; anche dalle cime delle alte montagne veggonsi le nebbie avanzarsi tra i fianchi delle sottoposte vallate, e coprire i bassi fondi lasciando libere le cime, sicchè ammettendo anche un avallamento nella materia solare, e questa scorrente a modo di rivi, non è mestieri supporla liquida, e al contatto del nucleo

solido, ma basta che essa sia come una densa nebbia, appunto come la supponeva Wilson. La preponderante azione della gravità che ivi è ben 27.9 volte più forte che alla superficie della terra può determinare la discesa di questa materia benchè gassosa con grande rapidità, come la gravità produce anche qui in terra l'abbassamento delle nubi. Che la materia luminosa nuoti come in un altra atmosfera trasparente, non pare potersi mettere in dubbio in modo alcuno, e noi parlando del calor solare in altri articoli ne abbiamo portate non mediocri prove, onde la teoria di Wilson non deve credersi in opposizione colla opinione più ricevuta, che la fotosfera solare sia gassosa. Ma se le macchie sono cavità, e la fotosfera tende a livellarsi sopra di esse, quanta sarà la spessezza di questo strato medesimo a cui dobbiamo la luce? Questa questione è stata toccata dal Wilson, il quale nelle sue osservazioni trovò la profondità della macchia di circa un semidiametro terrestre. Questa non sarebbe gran cosa relativamente al diametro del sole; ma troppo scarse sono su di ciò le nostre cognizioni: ad ogni modo però benchè non molto elevata, essa deve essere densissima, perchè ubbidisce assai prontamente alla gravità solare, e perchè assai densa è quell' atmosfera trasparente in cui nuota, della quale abbiamo già detto: che probabilmente lo strato infimo spandendosi nell'interno della cavità, può colla sua spessezza assorbire sempre più luce, e far comparire anche più oscure le parti depresse della fotosfera, e al contrario è probabile che le facole, cui è fuori di dubbio essere prominenze, non per altro appariscono più chiare del resto, se non perché si estollono alcun poco al di sopra degli strati più densi dell'atmosfera medesima.

Quì termina quanto possiamo dire con qualche probabilità di non errare in materia così difficile: le osservazioni che abbiamo recato in mezzo sulla struttura della penombra ci pare che rimuovano la principale difficoltà opposta alla teoria di Wilson, se questo sia in effetto noi lo lasciamo al giu-

dizio de'lettori, e paghi di avere accennato il fatto e rilevatane la importanza, ci contenteremo di avere aperto un nuovo campo di ricerche.

Resterebbe un sol punto a dilucidarsi, ed è per qual cagione la materia della fotosfera assuma l' aspetto così filamentoso e a modo di corrente, e perché al primo apparire le macchie sieno ordinariamente senza penombra, e anzi precedute da facole. Ma una soddisfacente spiegazione di ciò non può darsi evidentemente senza conoscere la natura della fotosfera, dal che siamo ben lontani. Forse l'ipotesi di Wilson stesso è la più ragionevole, che cioè gli squarciamenti nella fotosfera siano prodotti da eruzioni gassose uscenti con impeto dall'interno del globo solare, col che bene si spiegherebbero le prominenze o facole che precedono le macchie', come pure la circostanza, che il foro da principio è senza slabramento o penombra, perchè la veemenza de'gas lanciati impedisce l' afflusso della materia, cessato il quale la materia fluida della fotosfera prende il suo corso a riempire il vuoto prodotto. Forse così potrebbe spiegarsi la relazione da taluni supposta tra le protuberanze rossastre visibili in tempo di ecclissi e le macchie. Ma basti fin qui di queste congetture che poco far possono di giovamento alla vera scieza.

SULL' ANELLO DI SATURNO

NOTA

DEL P. A. SECCHI D. C. DI G.

In questi annali abbiamo dato notizia della singolare scoperta fatta recentemente di un terzo anello di Saturno concentrico agli altri due, ma da essi diverso, perchè è notabilmente più oscuro, e riflette pochissima luce. Il sig. Lassel ha dimostrato coi suoi forti telescopi ciò che noi avevamo sospettato, cioè che esso è trasparente (*): egli infatti ha potuto vedere attraverso a questo anello gli orli del di-

(*) V. Memorie dell' Osservatorio del C. R. anno 1850 p. 33.

sco del pianeta. Inoltre noi avevamo avvertito un fenomeno singolare (*), cioè che dalle due parti l' anello non pareva avere la medesima tinta, ma che da una appariva rossastro, e dall'altra turchiniccio : tutte le cautele si erano prese per riconoscere se questo derivare poteva da difetto di acromatismo nel nostro strumento, ma restammo convinti che era realmente proprio del pianeta, e non illusione. Ora il sig. Lassel ha trovato la stessa cosa senza sapere nulla della nostra scoperta (**): egli spera che questo fenomeno possa servire alla determinazione della rotazione dell' anello quando sia meglio studiato.

Ma una cosa anche più importante è stata trovata dal Sig. Ottone Struve figlio del celebre direttore dell' Osservatorio di Pulkowa, che mostrerebbe trovarsi quel sistema in uno stato di crisi tuttavia permanente (***). Paragonando egli le misure di Saturno prese da Ugenio, e le figure degli altri antichi, con i risultamenti delle moderne osservazioni, vi ha trovato una considerabile differenza in ciò, che la larghezza dell'anello, la quale da essi dicesi eguale, è alquanto minore dello spazio oscuro che separa il pianeta dall'anello medesimo, ora trovasi in tutte altre proporzioni, cioè la larghezza dell'anello é molto maggiore che lo spazio oscuro tra il pianeta e l'anello. Conseguenza immediata di questa curiosa differenza si è che l'anello deve essersi dilatato considerabilmente, sia verso il pianeta, sia all'esterno dalla parte opposta. Diverse ragioni però indicano che il diametro esteriore dell'anello è rimasto costante, e che tutta la variazione é una dilatazione del medesimo dalla parte interna. Infatti il rapporto del diametro del pianeta a quello dell'anello esterno rimane ora lo stesso quale é dato dagli antichi, mentre differisce assai il diametro dell'anello interiore, che ora è considerabilmente più piccolo.

(*) V. Memorie ec. anno 1851. p. 36.
(**) Monthly. Notices of the R. A. S. Vol. XIII. p. 147.
(***) Sur les dimensions des Anneaux de Saturne par Otto Struve, Mem. Acad. S. Petersbourg. IV. Serie. T. V. 1852.

Siccome in queste materie è sempre bene moltiplicare le autorità, ho voluto vedere se tra gli antichi astronomi italiani e celebri costruttori di lenti quali furono il Campani e il Divini, che furono anche bravi osservatori, potessi trovare una conferma di quello che dice il Sig. Struve, e sono stato assai fortunato di rinvenire una figura di Saturno data dal Campani nel 1664 in una operetta intitolata: *Ragguaglio di due nuove osservazioni, una celeste in ordine alla stella di Saturno; e terrestre l' altra in ordine agli strumenti medesimi co'quali si è fatta l'una e l'altra osservazione, dato al serenissimo Principe Mattia di Toscana da Giuseppe Campani da s. Felice dell'Umbria di Spoleto.* In Roma per Fabio del Falco 1664. La figura pare disegnata sul principiare del 1664: essa non é fatta con misure micrometriche, ma attestando esso che un suo amico di professione pittore gliene disegnò una simile possiamo stare sicuri che le proporzioni sono esatte. Di ciò se ne ha una prova anche in ciò che il rapporto tra il diametro del pianeta e dell'anello trovasi eguale a quello dato dalle misure di Ugenio e di Struve: così assumendo pel diametro del pianeta 17''.8 si ritrova pel diametro dell'anello esterno 39''.67, che appena differisce da 40''.0 che é la misura dedotta da Struve. Assicurato così che la figura era fatta nelle debite proporzioni, sono restato anch'io convinto esservi una notabile diversità tra essa e l' apparenza attuale di Saturno: l'anello nella fig. di Campani è largo un tantino meno che lo spazio oscuro che separa il pianeta.

Riferirò quì la tavola delle dimensioni antiche e moderne di queste due parti, estraendola dalla memoria del Sig. Struve, e inserendovi quella di Campani:

Osservatori	*Epoca*	*largh.ª dello spazio oscura*	*larghezza dell'anello*
Huyghens . . .	1657	6''.5	4''.6
Campani . , .	1664	6. 6	5. 4
Huyghens e Cassini	1695	6. 0	5. 1

Bradley. . . .	1719	5. 4	5. 7
Herschel . . .	1799	5. 12	5. 98
W. Struve. . .	1826	4. 36	6. 74
Encke e Galle .	1838	4. 04	7. 06
O. Struve . . .	1851	3. 67	7. 43

Da questa tavola conclude il Sig. Struve 1.° che le variazioni sono maggiori di quanto possa attribuirsi agli errori di osservazioni o alla influenza degli strumenti, che ora sono certamente migliori. 2.° che questa variazione progredisce col tempo, e ne deduce la formula seguente

$$\text{larghezza dell'anello} = 5''.134 - 0.0130\,(t - 1760).$$

Parrebbe però che in questi ultimi anni la dilatazione dell' anello sia ita progredendo più rapidamente che dianzi, onde forse da quì a non molti secoli l' anello potrebbe giungere a toccare il pianeta, onde sono bene lontani dal vero quelli che considerano questo sistema come se fosse in equilibrio.

Un altra prova della dilatazione dell'anello si ha dalle osservazioni di Cassini e di Maraldi. Essi infatti dicono che la divisione oscura che separa l'anello in due, è nel mezzo dell' anello: ma adesso la linea di divisione e bene al di là del mezzo, e l'anello interno ha una lunghezza in circa doppia dell'esterno, onde anche questo prova un allargamento dell'anello interiore. Di più le figure antiche ci danno l'anello che nella massima apertura appena tocca il pianeta col lembo interno, mentre ora ne copre una parte considerabile: tutte queste ragioni e fatti fanno vedere che realmente va succedendo una dilatazione nell'anello interiore.

Alcuni hanno creduto che l' anello nebuloso fosse di recente formazione, ma il Sig. O. Struve ha trovato traccie di esso nelle figure antiche ed io pure vedo nellá figura di Campani una certa specie di penombra dalla parte interna dell' anello, precisamente al luogo dell'anello nebuloso attuale, la quale mostra che anche allora esisteva questo anello, ma che

la sua sfumatura lo rendeva indiscernibile, e si credeva piuttosto che quella traccia fosse un'ombra dell'anello sul globo. Indizi sicuri di queste mutazioni sono le suddivisioni secondarie ora visibili ed ora nò, quale appunto era quella dell' anello oscuro che visibile nel 1850 è non fu più nel 52.

SOPRA ALCUNE FORMULE DERIVATE COL MEZZO DELL' INVERSIONE

NOTA

DEL SIG. PROF. G. BELLAVITIS

Chiariss. Professore

Padova il 6 Febbrajo 1853.

1. Se per ciascuno dei punti A, B, C, ... e per un punto fisso O si prende sulla retta OA la $OA' = 1 : OA$, sulla OB la $OB' = 1 : OB$, ec. i punti A', B', . . . costituiscono una figura *inversa* della A, B, . . . Questa derivazione da una figura ad un' altra si esprime, finchè tutti i punti O, A, B, . . . stanno in un piano coll' equipollenza

$$OA' \doteq 1 : \mathrm{cj}\, OA ,$$

come dissi nella Nota che Ella mi fece l'onore d'inserire nel fascicolo novembre 1852 dei suoi Annali. Secondo l'algoritmo del mio metodo ne risulta l'equipollenza

$$A'B' \doteq OB' - OA' \doteq (\mathrm{cj}\, OA - \mathrm{cj}\, OB) : \mathrm{cj}\, OA \,.\, \mathrm{cj}\, OB \doteq$$
$$- \mathrm{cj}\, AB : \mathrm{cj}\, OA \,.\, \mathrm{cj}\, OB ,$$

la quale esprime rispetto agli angoli la relazione

$$OA'B' = - OAB ,$$

e rispetto alle lunghezze la

$$A'B' = AB : OA \,.\, OB ,$$

da cui eziandio

$$AB = A'B' : OA' \,.\, OB' .$$

Questa relazione tra le distanze di due punti e dei loro inversi ha luogo per ogni figura anche a tre dimensioni, poichè il centro d'inversione O ed i quattro punti A B A' B' sono sempre in uno stesso piano.

2. Quando i tre punti A B C sono in linea retta è (non dimenticando mai la regola relativa ai segni)

$$AB + BC + CA = 0;$$

passando alla figura inversa, e perciò sostituendo

$$A'B' : OA'.OB' \quad \text{ad} \quad AB, \text{ ec.}$$

si ha

$$A'B'.OC' + B'C'.OA' + C'A'.OB' = 0,$$

la quale esprime il teorema Tolemaico, giacchè la figura inversa di una retta ABC è un circolo OA'B'C'.

3. Così per ogni quadrilatero ABCD inscrivibile nel circolo si ha

$$AB.CD + BC.AD + CA.BD = 0,$$

questa espressione sussisterà anche per quattro punti di una retta, ed è facilmente verificabile che essa è esatta anche tenendo conto dei segni. Ora *ogni equazione tra i punti di una retta dà immediatamente un'equipollenza pei punti di un piano*, dunque per quattro punti di un piano ha sempre luogo la equipollenza

$$AB.CD + BC.AD + CA.BD \doteq 0.$$

Cioè per ogni quadrilatero ABCD può costruirsi un triangolo, i cui lati sieno espressi dai termini di quella equipollenza; vale a dire un lato avrà la lunghezza = AB. CD, e l'inclinazione uguale alla somma delle inclinazioni delle AB, CD; simil cosa dicasi degli altri due lati. Come corollarii : se il quadrilatero ABCD abbia due angoli opposti supplementi si ricade nel teorema Tolemaico, e se due angoli opposti sono complementi, i prodotti delle diagonali CA, BD, e quelli dei lati opposti AB. CD, BC. AD hanno la stessa relazione dell'ipotenusa e dei cateti di un triangolo rettangolo.

4. Nella Geometria Superiore sono di grand'uso i rapporti analoghi al $\frac{DE.FG.HI}{DI.HG.FG}$, nei cui due termini entrano le stesse lettere prese nei due ordini opposti DEFGHI, DIHGFE; perlochè ciascuno dei rapporti semplici DE:FE, FG: HG, HI : DI ha una lettera comune ai due termini. Quei rapporti compo-

sti non sono menomamente cangiati dall'inversione, come ben si vede sostituendo ad ogni DE la sua (§. 1) eguale

$$D'E' : OD' . OE'.$$

5. Se nei due termini del rapporto composto sieno comprese le stesse direzioni di rette, il rapporto dicesi *projettivo*, perchè mantiene lo stesso valore in tutte le projezioni concorrenti della figura: in particolare tra quattro punti in linea retta si ha il rapporto projettivo

$$\frac{AB . CD}{AD . CB},$$

che il Chasles dice *anarmonico*. Daremo ora una formula generale per esprimere ogni rapporto projettivo di punti in linea retta mediante rapporti anarmonici.

6. Supponiamo che sopra una retta vi sieno i punti D', E', F', ... , nonchè i punti A, B', C'; e rispetto al centro d' inversione A sieno B, C, D, ... i punti inversi dei B', C', D', . . . Pei §. 1. 4. sarà

$$\frac{DE. FG. HI}{DI. HG. FE} = \frac{D'E'.F'G'.H'I'}{D'I'.H'G'.F'E'} = \frac{(C'D' - C'E')(C'F' - C'G') \ldots}{(C'D' - C'I')(C'H' - C'G') \ldots}$$

$$= \frac{\left(\frac{CD}{AC. AD} - \frac{CE}{AC. AE}\right)\left(\frac{CF}{AC. AF} - \frac{CG}{AC. AG}\right) \ldots}{\left(\frac{CD}{AC. AD} - \frac{CI}{AC. AI}\right)\left(\frac{CH}{AC. AH} - \frac{CG}{AC. AG}\right) \ldots};$$

moltiplicando ciascun termine per $\frac{AC. AB}{CB}$, ed indicando colla lettera minuscola il valore del rapporto anarmonico fra i tre punti fissi A, B, C ed un quarto punto, cioè ponendo

$$\frac{AB. CD}{AD. CB} = d, \quad \frac{AB. CE}{AE. CB} = e, \quad \text{ec.}$$

si ha

$$\frac{DE. FG. HI}{DI. HG. FE} = \frac{(d - e)(f - g)(h - i)}{(d - i)(h - g)(f - e)}.$$

Questa formula facilissima da ritenersi a memoria contiene

come casi particolari quelle date dal Moebius e dal Chasles: basta osservare che la quantità che nella fatta supposizione segnerebbesi con a è infinita, tale essendo

$$\frac{AB.CA}{AA.CB};$$

e che

$$b = \frac{AB.\,CB}{AB.\,CB} = 1\,;$$

e finalmente che

$$c = \frac{AB.\,CC}{AC.\,CB} = 0\,.$$

Così

$$\frac{AC.\,DE}{AE.\,DC} = \frac{(a-c)(d-e)}{(a-e)(d-c)} = \frac{d-e}{d}\,;$$

$$\frac{AC.\,BD}{AD.\,BC} = 1 - d = 1 - \frac{AB.\,CD}{AD.\,CB}\,;$$

$$\frac{AE.\,BD}{AD.\,BE} = \frac{1-d}{1-e} = \frac{1-\dfrac{AB.\,CD}{AD.\,CB}}{1-\dfrac{AB.\,CE}{AE.\,CB}} = \frac{\dfrac{CB}{AB}-\dfrac{CD}{AD}}{\dfrac{CB}{AB}-\dfrac{CE}{AE}}\,,$$

che è l'espressione (Chasles G. S. §. 33) del rapporto anarmonico di quattro punti A, E, B, D col mezzo di un quinto punto C. Potrebbero moltiplicarsi ad arbitrio questi esempii.

7. Quando un rapporto *projettivo* (§. 5) è $= \pm 1$, i punti formano un'*involuzione*, che io distinguo in *positiva* o *negativa* secondo il segno di quel valore. Quattro punti non possono essere se non se in involuzione negativa, ed allora si dicono punti *armonici*. Per sei punti in involuzione positiva, cioè per

$$\frac{AB.\,CD.\,EF}{AF.\,ED.\,CB} = 1\,,$$

si ha, colle formule del §. 6,

$$\frac{d(e-f)}{e-d} = 1;$$

ne viene che sarà anche

$$\frac{AE.\,FD.\,BC}{AC.\,BD.\,FE}=\frac{f-d}{(1-d)(f-e)}=1,$$

così pure

$$\frac{DE.\,CA.\,BF}{DF.\,BA.\,CE}=\frac{(d-e)(1-f)}{(d-f)e}=1,$$

e

$$\frac{DB.\,FA.\,EC}{DC.\,EA.\,FB}=\frac{(d-1)e}{d(f-b)}=1;$$

dunque una delle involuzioni positive trae seco le altre tre.

8. La precedente proprietà spetta a sei punti di una retta, pel principio fondamentale del metodo delle equipollenze (§. 3) essa si estende anche ai punti di un piano, cioè una di quelle quattro equipollenze dà le altre tre; il che esprime questo teorema : *Se l'esagono* ABCDEF *abbia il prodotto di tre lati alternativi eguale al prodotto degli altri tre* (AB.CD. EF $=$ AF. ED. CB) , *ed inoltre abbia la somma di tre angoli alternativi* ABC $+$ CDE $+$ EFA *eguale a quattro retti* : *sarà lo stesso degli esagoni* AEFDBC, DECABF, DBFAEC.

9. Dati in un piano ad arbitrio i cinque punti A, B, C, D, E è facile costruire il predetto esagono, giacchè si conosce l'angolo in F, ed il rapporto dei suoi due lati. Del resto esiste sempre un punto O pel quale ha luogo l' equipollenza OA. OD $\equiv$ OB. OE, essa dà la similitudine dei triangoli OAB, OED, ed inoltre esprime che, rispetto al centro d'inversione O, D è inverso di A, ed E inverso di B; in questo senso peraltro che le distanze OD, OE sono bensì inversamente proporzionali alle OA, OB, ma non cadono sulle loro stesse direzioni, invece una stessa retta dimezza ambedue gli angoli AOD, BOE. In questo medesimo significato il punto F è inverso di C; giacchè le due equipollenze

$$OA.\,OD \equiv OB.\,OE\,, \quad OC.\,OF \equiv OB.\,OE$$

rendono identiche le equipollenze del § 7; la prima diventa

$$(OB - OA)\left(\frac{OB.OE}{OA} - OC\right)\left(\frac{OB.OE}{OC} - OE\right)$$

$$= \left(\frac{OB.OE}{OC} - OA\right)\left(\frac{OB.OE}{OA} - OE\right)(OB - OC).$$

È un caso particolare del nostro esagono il quadrilatero completo coi vertici opposti A, D; B, E; C, F; ed anch' esso ha il suo centro d'inversione O.

10. Negli *Annales* etc. del Terquem, Gennaro 1853, Questione n. 250 si propone da dimostrare, che *dati sopra una retta quattro punti* A, B, C, D, *se si trovino i due punti* M, N *i quali sieno nello stesso tempo armonici tra* A *e* B *e tra* C *e* D ; *poscia i due* P, Q *armonici tra* A *e* C, *e tra* B *e* D; *ed i due* R, S *armonici tra* A *e* D *e tra* B *e* C; *saranno pure punti armonici* M, P, N, Q ; M, R, N, S ; P, R, Q, S. La prima condizione è espressa da

$$-1 = \frac{AM.BN}{AN.BM} = \frac{CM.DN}{CN.DM},$$

il che colle denominazioni del § 6 dà

$$1 - n + 1 - m = 0, \quad m(d-n) + n(d-m) = 0;$$

perciò i due numeri m, n che determinano i punti M , N sono dati dalle equazioni

$$m + n = 2, \quad mn = d.$$

Similmente le altre condizioni danno

$$p + q = 0, \quad pq = -d, \quad r + s = 2d, \quad rs = d.$$

Ne viene

$$\frac{MP.NQ}{MQ.NP} = \frac{(m-p)(n-q)}{(m-q)(n-p)} = -1,$$

$$\frac{MR.NS}{MS.NR} = \frac{(m-r)(n-s)}{(m-s)(n-r)} = -1,$$

$$\frac{PR.QS}{PS.QR} = \frac{(p-r)(q-s)}{(p-s)(q-r)} = -1,$$

il che è quanto voleva dimostrarsi.

11. Anche il teorema precedente può mediante il mio metodo (§. 3) estendersi a tutti i punti di un piano, ed allora AMBN , CMDN . . . . . PRQS sono *quadrilateri armonici*, che oltre essere inscrivibili nel circolo hanno il prodotto di due lati opposti eguale al prodotto degli altri due.

12. Tornando all'inversione definita nel § 1. vediamo tosto che tra le aree dei due triangoli OAB, OA'B' ha luogo la relazione

$$OA'B' = OAB : (OA.\ OB)^2.$$

Essendo d'altronde (fatta sempre attenzione ai segni)

$$A'B'C' = OA'B' + OB'C' + OC'A' ,$$

avremo

$$A'B'C'.(OA.OB.\ OC)^2 = OAB(OC)^2 + OBC(OA)^2 + OCA(OB)^2.$$

Se i tre punti A', B', C' sieno in linea retta, il primo membro si annulla, ed il secondo dà una proprietà di quattro punti O, A, B, C appartenenti ad un circolo , la quale del resto è una facile conseguenza del teorema Tolemaico.

13. Analogamente a ciò siccome il tetraedro OABC eguaglia il prodotto dei tre lati OA, OB, OC pel sesto del *senoide* del triedro O, così si ha (§. 1.)

$$OA'B'C' = OABC : (OA.\ OB.\ OC)^2.$$

Supposto che A', B', C', D' sieno quattro punti di un piano, *vediamo che per cinque punti* O, A, B. C, D *di una sfera ha luogo la relazione*

$$OABC(OD)^2 + OBAD(OC)^2 + OCDA(OB)^2 + ODCB(OA)^2 = 0.$$

Nei su citati *Annales*, Nov. 1852, Questione 267

$$A_1 ,\ A_2 ,\ A_3 ,\ A_4 ,\ A_5 ,\ M$$

sono sei punti situati sopra una sfera :

d_1 = distanza rettilinea di A_1 da M ,
d_2 = id. A_2 da M ,
d_3 = id. A_3 da M ;
ecc.
v_1 = volume del tetraedro $A_2\ A_3\ A_4\ A_5$,
v_2 = id. $A_1\ A_3\ A_4\ A_5$,
v_3 = id. $A_1\ A_2\ A_4\ A_5$,
v_4 = id. $A_1\ A_2\ A_3\ A_5$,
v_5 = id. $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$,

Si ha la relazione analitica

$$v_1 d_1 + v_2 d_2 + v_3 d_3 + v_4 d_4 + v_5 d_5 = 0$$

(Luchterhand.)

è proposta da dimostrarsi una relazione, che ha qualche rassomiglianza colla precedente, ma che credo sbagliata.

Soluzioni di alcune altre questioni proposte negli Annales del Terquem, novembre 1852.

Questione n. 269. Due superficie tagliandosi secondo una linea di curvatura, comune all'una e all'altra; lungo di questa linea, le due superficie si tagliano sotto il medesimo angolo. (O. I.).

La detta questione può risolversi nel seguente modo (mia Geometria descrittiva §. 363). Tutte le evolute (b), (b_1) ec. di una curva (c) sono linee brevissime di una superficie sviluppabile (A), e perciò, quando questa si sviluppa in un piano, quelle si sviluppano in linee rette; quindi due tangenti delle (b) (b_1) che s'incontrano in un punto della (c) vi si tagliano sotto un angolo costante. Ora se la (c) sia nello stesso tempo linea di curvatura di due superficie, le normali a queste in tutti i punti della (c) saranno inviluppate da due delle predette evolute (b) (b_1) , e quindi esse si taglieranno sotto angolo costante, e tale sarà pure l'inclinazione rispettiva delle due superficie che si tagliano lungo la (c); il che doveva dimostrarsi.

Le generatrici caratteristiche della predetta superficie (A) sono gli *assi* della curva (c) perpendicolari ai suoi piani osculatori; continuiamo a supporre che le tangenti della (b) sieno le normali della superficie , di cui (c) è una linea di curvatura; i diedri tra i tangenziali della superficie, ed i piani osculatori della (c) saranno eguali agli angoli sotto cui l'evoluta (b) taglia gli assi. Nello sviluppo della (A) la (b) diventa una retta, perciò la differenza di due qualsivogliano di quei diedri è uguale all'angolo compreso dopo lo sviluppo della (A) dalle due rette, che prima erano due assi della (c), cioè (adoperando la denominazione usata dal Bordoni) è ugua-

le al *complesso* degli angoli compresi fra gli assi. Se i due punti della (c), ai quali si riferisce quella differenza, sono infinitamente vicini, la differenza è uguale all'angolo infinitesimo dei due assi, ossia al diedro di due piani osculatori. Questo è un teorema del Liouville, di cui il precedente poteva considerarsi come un corollario.

L'equazione di 7.° grado proposta nella Questione n. 263: Dimostrare che l'equazione seguente ha sette radici comprese tra 0 ed 1:

$$3432x^7 - 12012x^6 + 16632x^5 - 11550x^4 + 4200x^3 - 756x^2 + 56x - 1 = 0 \qquad \text{(Gauss)}^*$$

diventa, fatto

$$x = y + \frac{1}{2}, \quad 3432y^7 - 1386y^5 + \frac{345}{2}y^3 - \frac{35}{8}y = 0,$$

la quale si risolve molto facilmente. Essa è la settima derivata dell'equazione $\left(y^2 - \frac{1}{4}\right)^7 = 0$, e siccome questa ha tutte le quattordici radici reali ed uguali a $\pm\frac{1}{2}$, così pel teorema del Rolle quella ha le sette radici reali e comprese tra $y = -\frac{1}{2}$ ed $y = \frac{1}{2}$; il che ec.

La questione n. 262

$$(-p)^n = -\frac{n}{1}C_{p,n} + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,C_{2p,n} - \ldots \pm C_{np,n};$$

n è un numero intero positivo, p una quantità qualunque, e

$$C_{p,n} = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

(Catalan).

La questione si riduce (uguagliando separatamente i termini

---

* Il Sig. Koralek, abile e spedito calcolatore, ha trovate le sei radici irrazionali con sette decimali; la settima è 0, 5.

contenenti le varie potenze della p) a determinare il valore di

$$n^m - n(n-1)^m + \frac{n(n-1)}{2}(n-2)^m \ldots \mp n.1^m ,$$

essendo m intero positivo uguale o minore di n. Ora é evidente che quella è l'espressione di $\Delta^n(x^m)$ corrispondente ad $x = 0$; perciò essa è $= 1.2.3\ldots n$, oppure $= 0$, secondo che $m = n$, oppure $m < n$.

Questione n. 268. Essendo dato un cono di secondo grado, ed un punto fisso nell'interno del cono; condurre per questo punto un piano tale che la sezione abbia per fuoco il punto fisso.

(Yvon Villarceau.)

Per un caso particolare consideriamo un cono rotondo, che sia tagliato nelle rette CX, CY da un piano condotto pel suo asse di rotazione CD, e pel dato punto R; si tratta di determinare un piano passante per R (sarà desso perpendicolare al piano XCY che tagli il cono in una curva (a), la quale abbia un suo foco nel punto R. È noto che una sfera inscritta nel cono tocca il piano della (a) nel suo foco R; perciò la traccia del cercato piano sarà la retta XRY condotta in guisa che il circolo inscritto nel triangolo CXY tocchi il lato XY nel dato punto R. — Il metodo delle equipollenze conduce per via *diretta* a soluzioni molto semplici (come feci vedere in alcune memorie, anche riguardo al celebre problema d'inscrivere in un circolo un poligono i cui lati passino per dati punti od abbiano date lunghezze), esso c'insegna che se tagliata la CX in E colla retta RE parallela all' asse CD (il quale dimezza l'angolo XCY) si prenda sulla RC le RU doppia della CE, e coi centri R, U e raggio eguale ad RC si formino le intersezioni T, T_1, le due soluzioni del problema saranno date dalle rette che da R si volgono ai due punti T, T_1.

Per risolvere la predetta Questione in tutta la sua generalità adopero i principii della *reciprocità nello spazio* esposti

a pag. 117 della mia Geometria descrittiva. Rispetto al centro di reciprocità R il dato cono del secondo ordine (C) abbia per reciproca la curva (c°), la quale sarà un'ellisse, perchè il punto R si suppone dato nell' interno del cono : per la (c°) si faccia passare un cilindro rotondo (A°), la sua reciproca (a) sarà una sezione del cono (C), ed il suo piano passerà per R, e sarà perpendicolare alle generatrici del cilindro (A°), perchè esso è reciproco del punto di concorso di tali generatrici, il quale è a distanza infinita. Il piano della (a) tagliando perpendicolarmente il cilindro rotondo lo taglia in un circolo, che (rispetto alla reciprocità nel piano, di cui si tratta) sarà reciproco della conica (a), la quale per conseguenza avrà un foco nel punto R, e sarà la sezione desiderata.

Per fissare le idee possiamo stabilire la reciprocità mediante la sfera, che ha il centro in R ed il raggio RC, dicendo che il piano reciproco di un punto è il suo piano polare rispetto a quella sfera. L' ellisse (c°) starà nel piano condotto pel vertice C del cono (C) tangenzialmente alla sfera, ed i suoi punti saranno sui raggi condotti dal centro R perpendicolarmente ai piani tangenziali al cono (C): determinati gli assi della (c°) è facilissimo trovare le due direzioni, che possono avere le generatrici di un cilindro (A°) che abbia la direttrice (c°), e sia rotondo; le sezioni cercate saranno quelle condotte per R perpendicolarmente a quelle due direzioni.

BIBLIOGRAFIA

Guida dei Naviganti a lungo corso
di Vincenzo Gallo Imper. Reg. Professore di Navigazione.
Trieste 1853. Vol. in 8.

Di questa Opera interessante se ne renderà conto nel nuovo fascicolo del venturo Giugno.

SOPRA GLI INTEGRALI A DIFFERENZE FINITE ESPRESSI PER INTEGRALI DEFINITI

MEMORIA

DI BARNABA TORTOLINI

1.° Per mezzo del Teorema di Taylor la differenza finita di una funzione vien data da una serie convergente, ed ordinata secondo le potenze ascendenti dell' incremento della variabile indipendente. Indicando perciò con i consueti simboli Δ, D, le caratteristiche di differenza finita, e di derivazione si avrà per $y=f(x)$

$$y+\Delta y=f(x+h),$$

ove h rappresenta l'incremento delle x, e quindi

$$\Delta y = h\mathrm{D}_x y + \frac{h^2}{1.2}\mathrm{D}^2{}_x y + \frac{h^3}{1.2.3}\mathrm{D}^3{}_x y \ldots\ldots$$

Quante volte venga assicurata la convergenza di questa serie entro dati limiti delle variabili x, h, potrà il secondo membro rappresentarsi sotto la formola simbolica

$$\Delta y = (e^{h\mathrm{D}_x} - 1)y,$$

ove e indica la base Neperiana. Proseguendo ad una differenza di second'ordine, si avrà per l' uso dei simboli

$$\Delta^2 y = (e^{h\mathrm{D}_x} - 1)\Delta y\,,$$

ossia

$$\Delta^2 y = (e^{h\mathrm{D}_x} - 1)^2 y\,.$$

Quindi per una differenza dell'ordine n^{esimo} si troverà

$$\Delta^n y = (e^{h\mathrm{D}_x} - 1)^n y\,.$$

Questa formola la quale trovasi dimostrata per un numero intero, e positivo si puó per analogia estendere ad un numero intero, e negativo, nel qual caso il primo membro rappresenterà un'integrale multiplo a differenze finite, per cui indicando secondo il consueto con Σ il segno d'integraziono finita si avrà la relazione fra i simboli

$$\Sigma^n = \frac{1}{\Delta^n} = \frac{1}{(e^{hD_x} - 1)^n}.$$

Riferendo questi a delle funzioni particolari si potranno ottenere differenti formole già ritrovate dai geometri, con le quali un'integrale multiplo a differenze finite è espresso da integrali multipli a differenze infinitamente piccole aggiunti a delle serie che procedono secondo le potenze ascendenti dell'incremento della variabile indipendente. Così denotando con $F(x)$ la funzione a cui si riferisca l' integrale finito, e ponendo $n = 1$, si ottiene dalla precedente formola

$$\Sigma F(x) = \frac{F(x)}{e^{hD_x} - 1} + \varphi(x),$$

la quale è comunemente attribuita a Maclaurino, e più volte dimostrata da Eulero, $\varphi(x)$ indica una funzione periodica della x, per la quale si verifichi $\Delta\varphi(x) = 0$. Se si sviluppi in serie la funzione esponenziale simbolica $(e^{hD_x} - 1)^{-1}$ otterremo facilmente

$$\Sigma F(x) = \frac{1}{h}\int F(x)\,dx - \frac{1}{2}F(x) + B_1 F'(x)\frac{h}{1.2}$$

$$- B_2 F'''(x)\frac{h^3}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + \ldots + \varphi(x).$$

B_1, B_2, . . . rappresentano i così detti numeri Bernoullia-

ni $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, . . . la convergenza della serie non ha luogo generalmente, ma solamente sotto date condizioni.

2.° Il Sig. *Plana* fin dal 1820 nel tomo 25 delle Memorie di Torino, giunse ad una formola per mezzo della quale la serie dei termini nella formola di Maclaurino, a cominciar dalla prima potenza di h, viene rappresentata da un solo integrale definito preso fra due limiti 0, ed ∞. La formola di cui si tratta è la seguente

$$\Sigma F(x) = \frac{1}{h}\int F(x)\, dx - \frac{1}{2} F(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^\infty \frac{F(x + ht\sqrt{-1}) - F(x - ht\sqrt{-1})}{e^{2\pi t} - 1} . dt.$$

Abel nel tom. 2° delle sue Opere postume pag. 45 si propone di determinare generalmente $\Sigma^n F(x)$ per un solo integrale definito semplice, e per il caso di $n=1$, ritrova in più modi la precedente formola dovuta al Sig. Plana, e che l'illustre geometra di Cristiania, ignorando la citata Memoria del Signor Plana, giudicava nuova. Mi propongo in questa Memoria la risoluzione della medesima questione di Abel per il valore di $\Sigma^n F(x)$; formerò il confronto di altre formole, che se ne possono dedurre, date similmente da altri geometri, ed in particolare dal Sig. Cauchy nel tom. 6.° delle Memorie dell'Istituto di Francia, ed anche in altra Memoria da esso pubblicata nel 1827 sull' applicazione del Calcolo dei Residui ai problemi di Fisica Matematica: estenderò le formole, ed i risultati per gli integrali finiti delle funzioni di più variabili indipendenti. L'analisi, che verrò ad esporre è fondata sull'uso dei simboli, e delle caratteristiche, e mostrerà una facile, ed elegante applicazione delle differenti formole, ed equazioni simboliche, e che vengono adoperate dai geometri moderni in particolare per la risoluzione di

molte questioni. Per il retto uso delle formole, ed equazioni simboliche ripeterò un'importante osservazione del Signor Cauchy (*), la quale consiste ad esaminare sotto quali condizioni sussistano certe formole le quali alcune volte sono esatte, ed alcune volte inesatte. Queste formole potrebbero essere quelle alle quali si giunge per mezzo dello sviluppo delle funzioni in serie composte di un numero infinito di termini, od anche quando si fanno entrare le caratteristiche sotto i segni d' integrazione. L' illustre geometra dice che il modo per riconoscere l'esattezza di queste formole consiste a sostituire i valori trovati per le incognite nelle equazioni alle quali queste incognite devono soddisfare, e ad esaminare se queste equazioni siano, o non siano verificate, e coll'assoggettare le serie introdotte nel calcolo a restare sempre convergenti. Del resto in diverse delle mie precedenti Memorie, ed in particolare in quelle pubblicate nel 1842, e 1843 nel giornale arcadico ho mostrato ad imitazione di altri geometri i vantaggi che presenta l'analogia delle potenze con le differenze, e la sostituzione delle caratteristiche sotto i segni d'integrazione, nelle integrazioni delle equazioni lineari differenziali a differenze finite, e a derivate parziali. Infine la lettura di una dotta Memoria del Sig. D.r Angelo Genocchi inserita in questi Annali nel settembre 1852 mi ha fatto richiamare ad esame la questione, che mi sono di sopra proposto, e che vengo a risolvere nei paragrafi seguenti.

3.° Richiamo ad esempio del Sig. *Plana*, e di *Abel* una formola d'integrale definito data da *Poisson* nel 1813 nella seconda delle sue Memorie sull'elettricità, e riportata anche da *Legendre* nel tom. 2.° degli Esercizi di Calcolo integrale pag. 189; l'integrale definito è il seguente

$$\frac{e^v+1}{e^v-1}-\frac{2}{v}=4\int_0^\infty \frac{dt\ \mathrm{sen}(vt)}{e^{2\pi t}-1} \ .$$

(*) Comptes Rendus 1843 2e. semestre pag. 449 et suiv.

Il primo membro rappresenta la funzione generatrice dei numeri Bernoulliani, e si ridurrà alla serie

$$\frac{B_1 v}{2}-\frac{B_2 v^3}{2.3.4}+\frac{B_3 v^5}{2.3.4.5.6}-=2\int_0^\infty\frac{dt\,\text{sen}\,(vt)}{e^{2\pi t}-1}\ .$$

Essa sarà convergente come fa osservare il Sig. Cauchy per valori di v inferiori a 2π. Sviluppando egualmente in serie $\text{sen}(vt)$, otterremo per i numeri Bernoulliani la formola generale

$$B_n=4n\int_0^\infty\frac{t^{2n-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1}\ .$$

Queste espressioni per i numeri Bernoulliani furono date per la prima volta dal sig. Plana nella Memoria di sopra citata, e ad esse si riducono altre antecedentemente date da Eulero negli atti di Pietroburgo. Esse trovansi anche nel tomo 2.° delle Opere postume di Abel pag. 222. Ripreso adunque l'integrale finito sotto forma simbolica

$$\Sigma F(x)=\frac{F(x)}{e^{hD_x}-1}+\varphi(x)$$

si riassuma la formola di Poisson di sopra citata, e che si potrà ridurre ad

$$\frac{1}{e^v-1}=\frac{1}{v}-\frac{1}{2}+2\int_0^\infty\frac{dt\,\text{sen}(vt)}{e^{2\pi t}-1}$$

e sostituiamo la caratteristica hD_x alla v, e gli esponenziali immaginari a $\text{sen}(vt)$, e poniamo secondo l'uso comunemente adottato $\sqrt{-1}=i$ si avrà

$$\frac{1}{e^{hD_x}-1}=\frac{1}{hD_x}-\frac{1}{2}+2\int_0^\infty\frac{(e^{thiD_x}-e^{-thiD_x})dt}{2i(e^{2\pi t}-1)}$$

quindi sostituita nel secondo membro di $\Sigma F(x)$ ed osservando che

$$\frac{F(x)}{hD_x} = \frac{1}{h}\int F(x)\,dx\,,\quad e^{thiD_x} F(x) = F(x + thi)$$

si otterrà immediatamente la formola

$$\Sigma F(x) = \frac{1}{h}\int F(x)dx - \frac{1}{2}F(x) + \varphi(x)$$

$$+ 2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} \cdot \frac{F(x + hti) - F(x - hti)}{2i}$$

la quale, come già si disse, fu data per la prima volta dal Sig. Plana, e dimostrata in più modi da Abel; sopra la medesima ripete a pag. 227 tom. 2.° l'illustre geometra di Cristiania: « *Cette expression de l'integrale finie d'une fonction quelconque me parait très-remarquable, et je ne crois pas qu' elle ait trouvée auparavant.* Alla stessa formola come fa osservare il Sig. D.r A. Genocchi alla pag. 407 del tomo 3.° di questi Annali 1852 si riduce egualmente un'altra formola data in questi ultimi tempi dal Sig. Prof. Schar in una Memoria inserita nel tom. 22 pag. 19 dell'Accademia delle Scienze di Bruxelles. Alla funzione periodica $\varphi(x)$ sia sostituita una costante arbitraria C, e supponiamo che i due integrali $\Sigma F(x)$, $\int F(x)dx$ svaniscano per $x = a$, è chiaro che sarà

$$C = \frac{1}{2}F(a) - 2\int_0^\infty \frac{F(a + hti) - F(a - hti)}{2i(e^{2\pi t} - 1)}\,dt,$$

ed insieme

$$\int F(x)\,dx = \int_a^x F(z)\,dz$$

d'onde

$$\Sigma F(x) = \frac{1}{h}\int_a^x F(z)\,dz - \frac{1}{2}\Big(F(x) - F(a)\Big)$$

$$+ 2\int_0^\infty \frac{F(x + hti) - F(x - hti)}{2i(e^{2\pi t} - 1)}\,dt$$

$$- 2\int_0^\infty \frac{F(a + hti) - F(a - hti)}{2i(e^{2\pi t} - 1)}\,dt$$

In seguito dedurremo altre formole di già trovate, e considerate dagli Analisti, e passeremo ora alla determinazione dell'integrale multiplo a diffenze finite.

4.° Il valor simbolico per l'integrale finito dell'ordine n^{esimo} sarà

$$\Sigma^n F(x) = \frac{F(x)}{(e^{hD_x} - 1)^n} + \varphi(x) \; .$$

e la questione si ridurrà a formare la potenza n^{esima} di $(e^v - 1)^{-1}$, la quale però in fine non dipenda che dal solo valore della potenza prima. Ora è facile il riconoscere, che posto per brevità

$$\frac{1}{e^v - 1} = u$$

in allora u^n dipenderà da u per mezzo di una equazione lineare differenziale a coefficienti costanti dell' ordine $n - 1$. Abel suppone formata questa equazione, e ne determina i coefficienti. Io amo piuttosto di far vedere come si componga l'equazione suddetta, il che porrà in evidenza la natura dei coefficienti medesimi. Si eseguisca nel precedente valore di u una derivazione relativamente alla variabile indipendente v, si avrà

$$\frac{-e^v}{(e^v - 1)^2} = Du \, ,$$

e siccome

$$\frac{e^v}{(e^v - 1)^2} = \frac{1}{e^v - 1} + \frac{1}{(e^v - 1)^2} \, ,$$

così si trae

$$\frac{1}{(e^v - 1)^2} = - u - Du = -(1 + D)u \; .$$

Proseguiamo la derivazione, verrà

$$\frac{2e^v}{(e^v - 1)^3} = (1 + D)Du \; .$$

$$\frac{F(x)}{hD_x} = \frac{1}{h}\int F(x)\,dx\,, \quad e^{thiD_x} F(x) = F(x + thi)$$

si otterrà immediatamente la formola

$$\Sigma F(x) = \frac{1}{h}\int F(x)dx - \frac{1}{2}F(x) + \varphi(x)$$

$$+ 2\int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \cdot \frac{F(x+hti) - F(x-hti)}{2i}$$

la quale, come già si disse, fu data per la prima volta dal Sig. Plana, e dimostrata in più modi da Abel; sopra la medesima ripete a pag. 227 tom. 2.° l'illustre geometra di Cristiania: « *Cette expression de l'integrale finie d'une fonction quelconque me parait très-remarquable, et je ne crois pas qu' elle ait trouvée auparavant.* Alla stessa formola come fa osservare il Sig. D.r A. Genocchi alla pag. 407 del tomo 3.° di questi Annali 1852 si riduce egualmente un'altra formola data in questi ultimi tempi dal Sig. Prof. Schar in una Memoria inserita nel tom. 22 pag. 19 dell'Accademia delle Scienze di Bruxelles. Alla funzione periodica $\varphi(x)$ sia sostituita una costante arbitraria C, e supponiamo che i due integrali $\Sigma F(x)$, $\int F(x)dx$ svaniscano per $x = a$, è chiaro che sarà

$$C = \frac{1}{2}F(a) - 2\int_0^\infty \frac{F(a+hti) - F(a-hti)}{2i(e^{2\pi t}-1)}\,dt,$$

ed insieme

$$\int F(x)\,dx = \int_a^x F(z)\,dz$$

d'onde

$$\Sigma F(x) = \frac{1}{h}\int_a^x F(z)\,dz - \frac{1}{2}\Big(F(x) - F(a)\Big)$$

$$+ 2\int_0^\infty \frac{F(x+hti) - F(x-hti)}{2i(e^{2\pi t}-1)}\,dt$$

$$- 2\int_0^\infty \frac{F(a+hti) - F(a-hti)}{2i(e^{2\pi t}-1)}\,dt$$

In seguito dedurremo altre formole di già trovate, e considerate dagli Analisti, e passeremo ora alla determinazione dell'integrale multiplo a diffenze finite.

4.° Il valor simbolico per l'integrale finito dell'ordine n^{esimo} sarà

$$\Sigma^n F(x) = \frac{F(x)}{(e^{hD_x} - 1)^n} + \varphi(x) .$$

e la questione si ridurrà a formare la potenza n^{esima} di $(e^v - 1)^{-1}$, la quale però in fine non dipenda che dal solo valore della potenza prima. Ora è facile il riconoscere, che posto per brevità

$$\frac{1}{e^v - 1} = u$$

in allora u^n dipenderà da u per mezzo di una equazione lineare differenziale a coefficienti costanti dell' ordino $n - 1$. Abel suppone formata questa equazione, e ne determina i coefficienti. Io amo piuttosto di far vedere come si componga l'equazione suddetta, il che porrà in evidenza la natura dei coefficienti medesimi. Si eseguisca nel precedente valore di u una derivazione relativamente alla variabile indipendente v, si avrà

$$\frac{-e^v}{(e^v - 1)^2} = Du ,$$

e siccome

$$\frac{e^v}{(e^v - 1)^2} = \frac{1}{e^v - 1} + \frac{1}{(e^v - 1)^2} ,$$

così si trae

$$\frac{1}{(e^v - 1)^2} = - u - Du = -(1 + D)u .$$

Proseguiamo la derivazione, verrà

$$\frac{2e^v}{(e^v - 1)^3} = (1 + D)Du .$$

Quì pure dalla decomposizione delle frazioni

$$\frac{e^v}{(e^v-1)^3}=\frac{1}{(e^v-1)^2}+\frac{1}{(e^v-1)^3},$$

e perciò si dedurrà sotto forma simbolica

$$\frac{2}{(e^v-1)^3}=(1+D)(2+D)u\,.$$

Da una nuova derivazione si dedurrebbe similmente

$$\frac{1.\,2.\,3}{(e^v-1)^4}=-(1+D)(2+D)(3+D)u\,,$$

ed in generale per un numero intero, e positivo potremo stabilire

$$\frac{1.\,2.\,3..(n-1)}{(e^v-1)^n}=(-1)^{n-1}(1+D)(2+D)(3+D)\,......(n-1+D)u.$$

In questa formola dopo lo sviluppo dei prodotti simbolici, si dovrebbe sostituire per u il valore

$$u=\frac{1}{v}-\frac{1}{2}+2\int_0^\infty\frac{dt\,\mathrm{sen}\,vt}{(e^{2\pi t}-1)},$$

e riferire insieme il simbolo D di derivazione alla variabile v. Ognun vede che nell' indicata formola entro il primo, e secondo membro ha luogo un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti dell' ordine $n-1$. Il coefficiente totale simbolico di u rappresenta la forma di un *fattoriale* di Vandermonde, e potrà anche dipendere dalla funzione Γ di Legendre. Infatti facendo uso delle notazioni di Vandermonde si ha per un fattoriale

$$[a]^n=a(a+1)(a+2)(a+3)\,...\,(a+n-1)$$

come per valori positivi di a, e per valori interi di n abbiamo dalla funzione Γ di Legendre

$$\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}=[a]^n\,,\ \Gamma(n)=1.\,2.\,3.\,..\,(n-1).$$

e perciò verrà

$$\frac{1}{(e^{v}-1)^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}\cdot\frac{[D]^n}{D}u=\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\Gamma(D+n)}{D\Gamma(D)}u.$$

Questa formola potrà somministrare se non altro il valor simbolico di un'integrale multiplo a differenze finite.

5.° Riprendiamo come al principio del precedente paragrafo

$$\Sigma^n F(x)=\frac{F(x)}{(e^{hD_x}-1)^n}+\varphi(x)$$

e pongasi $hD_x=\Box$, avremo la nuova formola

$$\Sigma^n F(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}\cdot\frac{[D]^n}{D}\cdot\left(\frac{1}{e^{\Box}-1}\right)F(x)+\varphi(x).$$

ovvero

$$\Sigma^n F(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\Gamma(D+n)}{D\Gamma(D)}\left(\frac{1}{e^{\Box}-1}\right)F(x)+\varphi(x),$$

ove il simbolo $\Box$ si riferisce alla x, ed il simbolo D alla $\Box$ come se fosse una vera quantità. Ciò posto come già si è fatto al paragrafo 3.° si riprenda l'integrale definito simbolico

$$\frac{1}{e^{\Box}-1}=\frac{1}{\Box}-\frac{1}{2}+\int_0^\infty\frac{dt(e^{t\Box i}-e^{-t\Box i})}{i(e^{2\pi t}-1)},$$

e facendone la sostituzione nella prima delle antecedenti formole, si avrà

$$\Sigma^n F(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}\left[\frac{[D]^n}{D}\cdot\left(\frac{1}{\Box}\right)F(x)-\frac{[D]^n}{D}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot F(x)\right]$$
$$+\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}\cdot\frac{[D]^n}{D}\int_0^\infty\frac{dt(e^{t\Box i}-e^{-t\Box i})}{i(e^{2\pi t}-1)}F(x)+\varphi(x).$$

Ora per una prima riduzione si vede, che il rapporto dei simboli $[D]^n : D$ riferito alla costante $\frac{1}{2}$ si riduce al solo

prodotto dei numeri naturali da 1 fino ad $n-1$; come anche

$$\frac{[\mathrm{D}]^n}{\mathrm{D}} e^{t\Box i}\mathrm{F}(x) = \frac{[ti]^n}{ti}.\, e^{t\Box i}\,\mathrm{F}(x) = \frac{[ti]^n}{ti}\,\mathrm{F}(x+hti)$$

$$\frac{[\mathrm{D}]^n}{\mathrm{D}} e^{-t\Box i}\,\mathrm{F}(x) = \frac{[-ti]^n}{-ti} e^{-t\Box i}\,\mathrm{F}(x) = \frac{[-ti]^n}{-ti}.\,\mathrm{F}(x-hti)\,;$$

quindi per il valore dell'integrale multiplo a differenze finite avremo

$$\Sigma^n\mathrm{F}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}.\frac{[\mathrm{D}]^n}{\mathrm{D}}\Big(\frac{1}{\Box}\Big)\mathrm{F}(x) + \frac{(-1)^n}{2}\,\mathrm{F}(x)$$

$$+\frac{(-1)^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{[ti]^n\mathrm{F}(x+hti)+[-ti]^n\mathrm{F}(x-hti)}{t(e^{2\pi t}-1)}dt + \varphi(x).$$

La funzione denotata per $\varphi(x)$ potrà essere o di forma razionale e del grado $n-1$, od anche di forma periodica. Restano a dichiararsi le operazioni del simbolo D sopra $\Box$, e quindi di $\Box$ sopra $\mathrm{F}(x)$. Osserviamo primieramente che siccome si ha

$$\int_0^\infty e^{-ay}\,dy = \frac{1}{a}$$

così sostituendo ad a la caratteristica $\Box$, potremo porre simbolicamente

$$\int_0^\infty e^{-\Box y}\,dy = \frac{1}{\Box}\,.$$

quindi per il primo termine del secondo membro della precedente ultima formola si avrà

$$\frac{[\mathrm{D}]^n}{\mathrm{D}}\Big(\frac{1}{\Box}\Big)\,\mathrm{F}(x) = \frac{[\mathrm{D}]^n}{\mathrm{D}}\int_0^\infty e^{-\Box y}\,dy.\,\mathrm{F}(x)$$

ossia

$$\frac{[\mathrm{D}]^n}{\mathrm{D}}\Big(\frac{1}{\Box}\Big)\mathrm{F}(x) = \Big(\int_0^\infty \frac{[y]^n}{y}\,e^{-\Box y}\,dy\Big)\mathrm{F}(x).$$

Ma qui pure non possono eseguirsi tutte le operazioni di $\square$ sopra $F(x)$, se non si eseguiscano gli sviluppi del fattoriale come si vedrà da quanto segue.

6.° Dalla forma del fattoriale $[a]^n$ si vede che eseguita la moltiplicazione dei fattori $a+1$, $a+2\ldots a+n-1$, si otterrà un risultato, che potrà rappresentarsi con

$$[a]^n = a\left(a^{n-1} + (n)_1\, a^{n-2} + (n)_2\, a^{n-3} + \ldots\ldots + (n)_{n-1}\right).$$

I coefficienti $(n)_1$, $(n)_2$ . . . . . $(n)_{n-1}$ possono determinarsi dalle cognite relazioni che passano fra le radici di un'equazione, ed i coefficienti, o a dir meglio fra le funzioni simmetriche delle radici dell'equazioni, ed i medesimi coefficienti, od anche per qualche altra relazione che passa fra i medesimi, e che verremo ad indicare in appresso. Se alla quantità a si sostuisca la caratteristica D, la quale sia riferita all'altra caratteristica $\square$ come se fosse una vera quantità, otterremo

$$\frac{[D]^n}{D}\cdot\frac{1}{\square} = D^{n-1}.\frac{1}{\square} + (n)_1 D^{n-2}.\frac{1}{\square}$$

$$+ (n)_{n-2}\, D.\frac{1}{\square} + (n)_{n-1}.\frac{1}{\square}\;.$$

Ora siccome dalla derivazione abbiamo generalmente

$$D^{r-1}.\frac{1}{\square} = (-1)^{r-1}\;\frac{1.\,2.\,3.\,.\,.(r-1)}{\square^r} = \frac{(-1)^{r-1}\,\Gamma(r)}{\square^r}$$

così é chiaro che si otterrà simultaneamente dopo la sostituzione di $\square = hD_x$

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}\cdot\frac{[D]^n}{D}\,.\,F(x)$$

$$=\left(\frac{1}{h^n D^n_x} - \frac{(n)_1}{n-1}\,\frac{1}{h^{n-1}\,D_x^{\,n-1}} + \frac{(n)_2}{(n-1)(n-2)}\,\frac{1}{h^{n-2}\,D_x^{\,n-2}} - \ldots\right.$$

$$\left.\mp\frac{(n)_{n-2}}{\Gamma(n)}\cdot\frac{1}{h^2\,D^2_x} \pm \frac{(n)_{n-1}}{\Gamma(n)}\cdot\frac{1}{hD_x}\right)F(x)\;.$$

Le potenze reciproche, e simboliche di D_x indicano altrettante integrazioni sopra $F(x)$, quindi avvertendo, che se l'integrale abbia luogo a partir da $x = a$, avremo per un'integrale multiplo decomposto in integrali semplici la formola

$$\iint\ldots F(x)dx^n = \int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3..(n-1)} F(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x (x-z)^{n-1}\,F(z)dz\ .$$

Fatta la sostituzione di tutti questi integrali, si otterrà una somma d'integrali, che potrà trasformarsi nell'integrale di una somma, ed ove il nuovo coefficiente di $F(z)dz$ sarà un fattoriale proveniente dalla moltiplicazione dei fattori

$$\frac{x-z}{h} - 1\,,\quad \frac{x-z}{h} - 2\ \ldots\ \frac{x-z}{h} - (n-1);$$

d'onde fatto per brevità

$$Z = \left(\frac{x-z}{h} - 1\right)\left(\frac{x-z}{h} - 2\right)\ldots\left(\frac{x-z}{h} - (n-1)\right)$$

otterremo in fine

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}\,\frac{[D]^n}{D}\cdot\frac{1}{\square}\,F(x) = \frac{1}{h\Gamma(n)}\int_a^x ZF(z)dz\ .$$

Il nuovo fattoriale Z può anche esprimersi per la funzione Γ di Legendre, infatti come è noto si ha

$$a(a-1)(a-2)\ldots\big(a-(n-1)\big) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)}$$

d'onde

$$Z = \frac{\Gamma\left(\frac{x-z}{n} + 1\right)}{\left(\frac{x-z}{h}\right)\Gamma\left(\frac{x-z}{h} - n + 1\right)}$$

e si avrà ancora

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}\frac{[\mathrm{D}]^n}{\mathrm{D}}\cdot\frac{1}{\square}\mathrm{F}(x)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x\frac{\Gamma\left(\frac{x-z}{n}+1\right)\mathrm{F}(z)dz}{(x-z)\Gamma\left(\frac{x-z}{n}-n+1\right)}.$$

Questo valore sostituito nell'ultima formola dell'antecedente parag. 5.° darà per l'integrale finito multiplo

$$\Sigma^n\mathrm{F}(x)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x\frac{\Gamma\left(\frac{x-z}{h}+1\right)\mathrm{F}(z)dz}{(x-z)\Gamma\left(\frac{x-z}{h}-n+1\right)}+\frac{(-1)^n}{2}\mathrm{F}(x)$$

$$+\frac{(-1)^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty\frac{[ti]^n\mathrm{F}(x+hti)+[-ti]^n\mathrm{F}(x-hti)}{t(e^{2\pi t}-1)}dt+\varphi(x).$$

Il secondo membro di questa formola dovrà certamente coincidere con quanto trova *Abel* sullo stesso soggetto al tom. 2.° pag. 48 delle sue opere. Faccio però qui un'osservazione, che secondo il metodo di Abel mi pare che potrebbe restare difficile la riduzione della sua formola alla mia, quando anche nella detta formola di Abel si facesse la riduzione, e la somma di tutti gli integrali multipli indefiniti ad un solo integrale, ed il che costituisce il primo termine della nuova formola. Ciò proviene perchè Abel non ha avvertito che la funzione

$$a\left(a^{n-1}+(n)_1\,a^{n-2}+(n)_2\,a^{n-3}\ldots\ldots+(n)_{n-1}\right)$$

proveniva dal fattoriale $[a]^n$. Lo stesso può dirsi relativamente al termine che trovasi espresso per l'integrale definito fra i limiti di 0, ed ∞. Nella medesima formola la $\varphi(x)$ dovrà contenere le n costanti arbitrarie dovute all'integrazione.

7.° Lo sviluppo del fattoriale di Vandermonde porta seco naturalmente la determinazione dei coefficienti, e sulla quale ci fermeremo per un' istante. Abbiamo come dal principio dell'antecedente parag.

$$[a]^n = a\left(a^{n-1} + (n)_1\, a^{n-2} + (n)_2\, a^{n-3} + \ldots . + (n)_{n-1}\right) .$$

I coefficienti $(n)_1$, $(n)_2$, . . . $(n)_{n-1}$ potrebbero a dir vero determinarsi dalle note relazioni che passano fra i coefficienti, e le funzioni simmettriche delle radici di una equazione; ma possiamo ottenerne il valore in un modo più semplice. È facile il riconoscere che fra i numeri denotati con $(n)_r$ sussiste la relazione

$$(n + 1)_r = (n)_r + n(n)_{r-1} ,$$

ove sia $(n)_0 = 1$, quindi è chiaro che considerando $(n)_r$ come funzione di n di cui sia 1 la differenza finita, si avrà

$$\Delta(n)_r = (n + 1)_r - (n)_r$$

e perciò

$$\Delta(n)_r = n(n)_{r-1} ;$$

d'onde

$$(n)_r = \Sigma\left(n(n)_{r-1}\right) .$$

Così per $r = 1, 2, 3, \ldots$ si ricaverà

$$(n)_1 = \Sigma(n) ,\ (n)_2 = \Sigma\left(n\Sigma(n)\right) ,\ (n)_3 = \Sigma\left[n\Sigma\left(n\Sigma(n)\right)\right] , \ldots$$

e così di seguito. Eseguendo le integrazioni indicate si trova

$$(n)_1 = \Sigma(n) = 1 + 2 + 3 \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$(n)_2 = \Sigma\frac{n^2(n-1)}{2} = \frac{\Sigma n^3}{2} - \frac{\Sigma n^2}{2} ,$$

ossia

$$(n)_3 = \frac{n(n-1)(3n^2-7+2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.$$

Nella stessa guisa si avrebbe ad operare per gli altri. Aggiungeremo che volendo cominciare dai finali in ordine inverso, si avrà per l'ultimo

$$(n)_{n-1} = 1.\ 2.\ 3. \ldots (n-1) = \Gamma(n),$$

quindi per il penultimo dalle proprietà delle radici di un' equazione

$$(n)_{n-2} = \Gamma(n) + \frac{\Gamma(n)}{n-1} + \frac{\Gamma(n)}{n-2} \ldots + \frac{\Gamma(n)}{2},$$

ossia

$$(n)_{n-2} = \Gamma(n)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right),$$

ovvero

$$(n)_{n-2} = \Gamma(n)\ \Sigma\left(\frac{1}{n}\right).$$

Egualmente per $(n)_{n-3}$ si troverebbe

$$(n)_{n-3} = \Gamma(n)\Sigma\left[\frac{1}{n}\ \Sigma\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

e così per gli altri. La determinazione di questi ultimi è d' accordo con quella fatta da Abel. I numeri $(n)_1$, $(n)_2$ godono di molte interessanti proprietà, e si può consultare una Memoria del Sig. Prof. Bellavitis inserita in questi Annali dello scorso marzo.

8.° Nella nuova formola per $\Sigma^n F(x)$ sviluppiamo nell'integrale definito fra i limiti di 0, e di ∞ i fattoriali di forma immaginaria col cominciare dalle prime potenze, avremo un risultato della forma

$$[ti]^n = Ati + B(ti)^2 + C(ti)^3 + D(ti)^4 \text{ ec.}$$

$$[-ti]^n = A(-ti) + B(-ti)^2 + C(-ti)^3 + D(-ti)^4 \text{ ec.}$$

ovvero

$$[ti]^n = -Bt^2 + Dt^4 \ldots + (At - Ct^3 + \ldots)i$$

$$[-ti]^n = -Bt + Dt^4 \ldots - (At - Ct^3 + \ldots)i$$

Pongasi per brevità

$$F(x + hti) = \mathcal{F}, \qquad F(x - hti) = \mathcal{F}_1$$

$$P = A - Ct^2 + \ldots, \qquad Q = Bt - Dt^3 \text{ ec.}$$

e si sostituisca il tutto nel valore di $\Sigma^n F(x)$, verrà l'integrale definito fra i limiti 0, ed ∞ a rivestirsi della forma datagli da Abel. Nel valore di Q viene per equivoco lasciata la prima potenza di t, e questo errore viene riprodotto anche in un'esempio. Infatti Abel suppone

$$F(x) = e^{ax}, \quad h = 1,$$

e per $n = 2$, deve essere

$$\frac{1}{(e^a - 1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 2\int_0^\infty \frac{dt \operatorname{sen} at}{e^{2\pi t} - 1}$$
$$- 2\int_0^\infty \frac{tdt \cos at}{e^{2\pi t} - 1},$$

mentre esso scrive $dt \cos at$ invece di $tdt \cos at$. Aggiungiamo infine che il metodo esposto da Abel per la determinazione di $\Sigma^n F(x)$ viene anche riportato dal Sig. *Oskar Schlömilch* distinto Professore di Analisi nella scuola politecnica di Dresda in una sua Opera sotto il titolo: *Théorie der differenzen und Summen* Halle 1848 pag. 170. Converrebbe ora di esaminare alcuni casi particolari, che presenta l'ottenuto valore di $\Sigma^n F(x)$ per poterne formare dei confronti con altre formole dedotte da considerazioni diverse, ma prima di venire a questo esame non credo inutile d'insistere per altro poco a far vedere come lo stesso valore di $\Sigma^n F(x)$ possa esser dedotto in altro modo anche più semplice di quello esposto di sopra, e che ci darà in appresso norma per ot-

tenere nuove formole più generali atte a risolvere problemi somiglianti.

9.° Avverto che l'espressione $\Sigma^n F(x)$ verifica l' equazione lineare a differenze finite

$$\Delta^n y = F(x),$$

la quale sarà inclusa come caso particolare nell' altra equazione

$$(\Delta - r)^n y = F(x).$$

Ora nelle mie Memorie sull'applicazione del calcolo dei residui all'integrazione dell'equazioni lineari, e pubblicate nel Giornale Arcadico fin dagli anni 1835 e 1842 nei tomi 63 e 90; dimostrai che l'integrale dell'ultima riportata equazione era dato dalla formola

$$y = \frac{D_r^{n-1} . (1+r)^{\frac{x}{h}-1} \Sigma (1+r)^{-\frac{x}{h}} F(x)}{1.\ 2.\ 3. \ldots (n-1)}$$

e sarà anche completo l' integrale, mentre ad ogni derivazione relativa ad r si riproduce un nuovo segno Σ d'integrazione, e perciò possono considerarsi incluse le n costanti arbitrarie. Se l'integrale abbia di più luogo a partir da $x=a$, esso potrà anche porsi sotto le forma

$$y = \frac{1}{1.\ 2.\ 3..(n-1)} D_r^{n-1} . \sum_a^x (1+r)^{\frac{x-z}{h}-1} F(z).$$

Quindi se dopo le derivazioni si ponga $r = 0$ otterremo il valore di $\Sigma^n F(x)$ decomposto in integrali semplici. Si eseguiscano le $n - 1$ derivazioni ivi indicate, e pongasi per i nuovi fattoriali

$$[a]_n = a(a-1)(a-2)\ldots(a-(n-1)),$$

$$\left[\frac{x-z}{h}\right]_n = Z\left(\frac{x-z}{h}\right),\quad \Gamma(n) = 1.\,2.\,3.\ldots(n-1)$$

si ritroverà

$$y = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_a^x \left(Z(1+r)^{\frac{x-z}{h}-n} F(z) \right).$$

quindi per $r = 0$ si otterrà la formola

$$\Sigma^n F(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_a^x ZF(z)$$

ove dopo le integrazioni si dovrà porre $z = x$. Ciò posto per la formola di Maclaurino riportata al parag. 3.°, sarà evidentemente

$$\Sigma^n F(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \cdot \frac{ZF(z)}{e^{hD_z}-1} + \varphi(x).$$

o ciò che torna lo stesso

$$\Sigma^n F(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{ZF(z)}{hD_z} - \frac{1}{2} ZF(z) \right)$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{(e^{thiD_z} - e^{-thiD_z})}{i(e^{2\pi t}-1)} ZF(z).$$

Il prodotto $ZF(z)$ per $x = z$ si riduce evidentemente ad

$$(-1)^{n-1}\, 1.\,2.\,3.\ldots(n-1) = (-1)^{n-1}\,\Gamma(n),$$

come anche per $x = z$

$$e^{thiD_z} ZF(z) = \frac{[-ti]_n}{-ti} F(x + hti)$$

$$e^{-thiD_z} ZF(z) = \frac{[ti]_n}{ti} F(x - hti),$$

d'onde per la sostituzione

$$\Sigma^n F(x) = \frac{1}{h\Gamma(n)}\int_a^x ZF(z)dz + \frac{(-1)^n}{2} F(x) + \varphi(x)$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \frac{[-ti]_n F(x+hti) + [ti]_n F(x-hti)}{t(e^{2\pi t}-1)} dt$$

Questa formola verrà a coincidere con quella trovata verso la fine del parag. 6.° col sostituire il valore di Z espresso per la funzione Γ di Legendre, ed i valori dei nuovi fattoriali della forma $[a]_n$ per quei della forma $[a]^n$: infatti per questi ultimi si ha

$$[a]_n = a(a-1)(a-2)\ .\ .\ .\ (a-(n-1)),$$

$$[a]^n = a(a+1)(a+2)\ .\ .\ .\ (a+(n-1))$$

e si trae per la mutazione di a in $(-a)$

$$[-a]_n = (-1)^n\,[a]^n\ ,\quad [-a]^n = (-1)^n\,[a]_n\ ;$$

d'onde si scorge subito l'identità delle due formole. L'utilità del metodo testè adoprato consiste principalmente nell'aver prima decomposto un'integrale finito multiplo in un integrale finito semplice, per poter quindi far uso della formola di Maclaurino rappresentata da un'integrale definito semplice. Mostreremo in altra memoria l'utilità di queste riduzioni per gli integrali finiti di più variabili indipendenti, e per le integrazioni dell'equazioni a differenze finite.

10.° Prendiamo ora in considerazione qualche caso particolare. Sia nuovamente $n = 1$, e supponiamo, che le integrazioni abbiano luogo a partir da $x = 0$, in allora l'ultima formola del parag. 3.° diviene

$$\overset{x}{\underset{0}{\Sigma}} F(x) = \frac{1}{h}\int_0^x F(x)dx - \frac{1}{2}\Big(F(x) - F(0)\Big)$$

$$+ \int_0^\infty \frac{F(x+hti) - F(x-hti)}{i(e^{2\pi t}-1)} dt - \int_0^\infty \frac{F(hti) - F(-hti)}{i(e^{2\pi t}-1)} dt.$$

Che di più si supponga estesa l'integrazione fino ad $x=h$, sarà $\overset{h}{\underset{o}{\Sigma}}F(x)=F(o)$, ed avremo

$$\int_o^h F(x)dx=\frac{h[F(h)+F(o)]}{2}$$

$$-\frac{h}{i}\int_o^\infty \frac{F(h+thi)-F(h-thi)-F(thi)+F(-thi)}{e^{2\pi t}-1}dt,$$

la quale viene riportata nella citata Memoria del Sig. Dott.^{r} Genocchi alla pag. 412 degli Annali an. 1852. Che se in questa stessa formola si ponga di più $\frac{t}{h}$ invece di t si si vedrà in allora la coincidenza con quella data dal Signor Cauchy fin dall'anno 1827 nella Memoria sull' applicazione del Calcolo dei Residui ai problemi di Fisica matematica pag. 8; e segnata n.° (36), e riprodotta di più dal medesimo Sig. Cauchy nel tom. 6. delle Memorie dell'Instituto di Francia pag. 609, e segnata n.° (16). L'illustre Geometra la trova come caso particolare di altre formole, le quali servono allo sviluppo delle funzioni in serie periodiche. Soggiunge di più. *La formule* (16) *paraît mériter l'attention des géomètres.* Facendo altre supposizioni sulla medesima formola riportata alla fine del parag. 3°, se ne potranno dedurre delle altre, le quali si applicano utilmente a molte questioni di analisi, ed in particolare alla teorica dei residui quadratici, come fece il Sig. Dott.^{r} Genocchi nella sua Memoria più volte citata. Fermiamoci per un'istante a supporre con Abel, $x=\infty$, e che per questo valore sia

$$F(x)=0, \qquad \int F(x)\,dx=0.$$

In questa ipotesi sarà

$$\overset{x}{\underset{a}{\Sigma}}F(x)=F(a)+F(a+1)+F(a+2)\ldots.$$

e la citata ultima formola del parag. 3 diviene, per $h=1$

$$F(a) + F(a+1) + F(a+2) + \dots$$
$$= \int_a^\infty F(x)dx + \frac{1}{2} F(a) - \int_0^\infty \frac{F(a+ti) - F(a-ti)}{i(e^{2\pi t} - 1)} dt.$$

Prendendo in essa $F(a) = \frac{1}{a^2}$, e fatto in seguito $a = 1$, si ottiene per la nota serie

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6} = \frac{3}{2} + 4\int_0^\infty \frac{tdt}{(1+t^2)^2(e^{2\pi t}-1)}.$$

In questo esempio scelto da Abel si trova $\frac{\pi^2}{4}$ invece di $\frac{\pi^2}{6}$ come deve essere. La medesima somma si può ottenere dalla seconda delle formole di questo paragrafo, col prendere $F(x) = x^2$, e si troverà senza difficoltà

$$\int_0^\infty \frac{tdt}{e^t - 1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Non é difficile estendere le applicazioni delle precedenti formole per la somma di altre serie, come per esempio

$$F(a) - F(a+1) + F(a+2) - F(a+3) + \dots,$$

che per brevità tralasciamo, e nel seguente ed ultimo parag. della presente Memoria daremo un breve cenno sulla forma analoga, della quale si rivestono gli integrali finiti delle funzioni di più variabili indipendenti.

11.° Prendasi

$$u = F(x, y, \dots),$$

e siano $h = \Delta x$, $k = \Delta y$, ... gli incrementi delle variabili x, y .... avremo per l'incremento della funzione

$$\Delta u = F(x+h, y+k, \dots) - F(x, y, \dots)$$

Se il secondo membro si sviluppa per mezzo del teorema di Taylor in serie convergente potrà esso porsi sotto la forma simbolica

$$\Delta u = (e^{(hD_x + kD_y \cdots)} - 1)u$$

e rappresentando con il simbolo $\square$ la funzione lineare delle caratteristiche D_x , D_y , ... , cioè

$$hD_x + kD_y + \ldots = \square ,$$

si avrà

$$\Delta u = (e^{\square} - 1)u .$$

Nella stessa guisa per una differenza seconda

$$\Delta^2 u = (e^{\square} - 1)^2 u.$$

Ed in generale per una differenza dell'ordine n^{esimo}

$$\Delta^n u = (e^{\square} - 1)^n u.$$

Questa formola che sussiste per n intero e positivo, per induzione si estende ad un numero intero, e negativo, nel qual caso il primo membro rappresenterà un'integrale multiplo a differenze finite di una funzione di più variabili, il che porge

$$\Sigma^n F(x, y, \ldots) = \frac{F(x, y \ldots.)}{(e^{\square} - 1)^n} + \varphi(x, y, \ldots.)$$

Per $n = 1$, si ha semplicemente

$$\Sigma F(x, y, \ldots..) = \frac{F(x, y, \ldots)}{e^{\square} - 1} + \varphi(x, y, \ldots.)$$

quindi se come al parag. 5.° si ponga la nuova caratteristica $\square$ sotto il segno d'integrazione, potremo scrivere per la formola di Legendre

$$\frac{1}{e^{\square} - 1} = \frac{1}{\square} - \frac{1}{2} + \int_0^\infty \frac{dt(e^{t\square i} - e^{-t\square i})}{i(e^{2\pi t} - 1)} .$$

Ora fattane la sostituzione nel secondo membro della precedente equazione, è evidente che

$$\frac{F(x, y, \ldots)}{\square} = \frac{F(x, y, \ldots.)}{hD_x + kD_y \ldots.}$$

rappresenterà l'integrale dell' equazione lineare a derivate parziali

$$(hD_x + kD_y + ...)\, v = F(x, y, ...) ,$$

quale potrà esser dato dal valore simbolico

$$v = \frac{1}{h}\, e^{-x\left(\frac{k}{h}D_y + ...\right)} \int e^{x\left(\frac{k}{h}D_y + ...\right)} F(x, y, ...)dx.$$

Sotto il segno d'integrazione s'intende inclusa un' arbitraria funzione delle rimanenti variabili y, ... in modo che se l'integrazione relativamente ad x, abbia luogo a partir da $x=a$, e si chiami $\psi(y\, ...)$ l'arbitraria funzione, si otterrà

$$v = \frac{1}{h}\left[\psi\left(\frac{hy-kx}{h}, ...\right) + \int_a^s F\left(s, \frac{yh + k(s-x)}{h}, ...\right)ds\right].$$

Nello stesso modo per il teorema di Taylor esteso a più variabili indipendenti, abbiamo

$$e^{t\Box i} F(x, y, ...) = F(x + hti,\ y + kti, ...) = \mathcal{F}$$

$$e^{-t\Box i} F(x, y, ...) = F(x - hti,\ y - kti, ...) = \mathcal{F}_1$$

d'onde per l'integrale a differenze finite ricaviamo

$$\Sigma.F(x, y\, ...) = \frac{1}{h}\left[\psi\left(\frac{hy-kx}{h}\right) + \int_a^s F\left(s, \frac{yh+k(s-x)}{h}, ...\right)ds\right.$$

$$\left. - \frac{F(x, y...)}{2} + \int_0^\infty \frac{(\mathcal{F} - \mathcal{F}_1)dt}{i(e^{2\pi t} - 1)} + \varphi(x, y, ...)\right. .$$

La funzione $\varphi(x, y, ...)$ potrebbe ridursi ad una costante arbitraria, ed anche restare funzione periodica delle x, y . . . Formole analoghe sussistono per gli integrali multipli, come mostreremo in altra Memoria, ove verra posto in evidenza il nesso, che passa fra gl'integrali dell'equazioni a differenze parziali tanto finite, quanto infinitesime.

INTORNO AD ALCUNE FORMOLE CHE SI RISCONTRANO NELLA TEORICA DELLE SUPERFICIE.

NOTA

DEL SIG. PROF. F. BRIOSCHI

Le espressioni trovate, dapprima dal Sig. Lamè, ed in seguito dai Sigg. Bertrand, Bonnet ec. pei raggi di curvatura corrispondenti al punto comune intersezione di tre superficie ortogonali; furono recentemente dimostrate dal Sig. Liouville (*) quali casi particolari di altre espressioni che si riscontrano nella ricerca delle grandezze dei raggi di curvatura delle sezioni normali corrispondenti al punto comune intersezione di tre superficie qualunque. A questo scopo indicando con u, v, w tre parametri variabili esistenti nelle equazioni delle tre superficie, e ponendo:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\left(\frac{dz}{du}\right)^2=E_1\,,\quad \left(\frac{dx}{dv}\right)^2+\left(\frac{dy}{dv}\right)^2+\left(\frac{dz}{dv}\right)^2=E_2\,,$$

$$\left(\frac{dx}{dw}\right)^2+\left(\frac{dy}{dw}\right)^2+\left(\frac{dz}{dw}\right)^2=E_3\,,$$

$$\frac{dx}{du}\,\frac{dx}{dv}+\frac{dy}{du}\,\frac{dy}{dv}+\frac{dz}{du}\,\frac{dz}{dv}=F_1\,,$$

$$\frac{dx}{du}\,\frac{dx}{dw}+\frac{dy}{du}\,\frac{dy}{dw}+\frac{dz}{du}\,\frac{dz}{dw}=F_2\,,$$

$$\frac{dx}{dv}\,\frac{dx}{dw}+\frac{dy}{dv}\,\frac{dy}{dw}+\frac{dz}{dv}\,\frac{dz}{dw}=F_3\,,$$

(*) Journal de Mathématiques publié par M. Liouville. Decembre 1852.

il Sig. Liouville dà la formula per la grandezza del raggio di curvatura di una sezione normale per una qualunque di quelle tre superficie, per esempio per quella per la quale $w =$ cost.^{e} formata mediante le E_1, E_2, F_1, F_2, F_3 e loro derivate, ed i parametri u, v. Analogamente si ponno ottenere le formole pei raggi di curvatura delle sezioni normali corrispondenti alle altre due superficie.

In questa breve nota proponiamo un mezzo semplicissimo a dimostrare la formola enunciata dal Signor Liouville, col qual mezzo si ponno ottenere altre importanti formole approfittando delle note ricerche intorno alla teorica delle superficie. Osserviamo che assumendo per brevità:

$$D = \det \begin{vmatrix} \frac{d^2x}{du^2}, & \frac{d^2y}{du^2}, & \frac{d^2z}{du^2} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \\ \frac{dx}{du}, & \frac{dy}{du}, & \frac{dz}{du} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \det \begin{vmatrix} \frac{d^2x}{du\,dv}, & \frac{d^2y}{du\,dv}, & \frac{d^2z}{du\,dv} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \\ \frac{dx}{du}, & \frac{dy}{du}, & \frac{dz}{du} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \det \begin{vmatrix} \frac{d^2x}{dv^2}, & \frac{d^2y}{dv^2}, & \frac{d^2z}{do^2} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \\ \frac{dx}{du}, & \frac{dy}{du}, & \frac{dz}{du} \end{vmatrix}, \quad H = \det \begin{vmatrix} \frac{dx}{du}, & \frac{dy}{du}, & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv}, & \frac{dy}{dv}, & \frac{dz}{dv} \\ \frac{dx}{dw}, & \frac{dy}{dw}, & \frac{dz}{dw} \end{vmatrix}$$

si hanno le seguenti equazioni:

$$DH = L = \det \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{dE_1}{du}, & \frac{dF_1}{du} - \frac{1}{2}\frac{dE_1}{dv}, & \frac{dF_2}{du} - \frac{1}{2}\frac{dE_1}{dw} \\ F_1, & E_2, & F_3 \\ E_1, & F_1, & F_2 \end{vmatrix}$$

$$D_1H = M = \det \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{dE_1}{dv}\,, & \frac{1}{2}\frac{dE_2}{du}\,, & \frac{1}{2}\left(\frac{dF_3}{du} + \frac{dF_2}{dv} - \frac{dF_1}{dw}\right) \\ F_1\,, & E_2\,, & F_3 \\ E_1\,, & F_1\,, & F_2 \end{vmatrix}$$

$$D_2H = N = \det \begin{vmatrix} \frac{dF_1}{dv} - \frac{1}{2}\frac{dE_2}{du}\,, & \frac{1}{2}\frac{dE_2}{dv}\,, & \frac{dF_3}{dv} - \frac{1}{2}\frac{dE_2}{dw} \\ F_1\,, & E_2\,, & F_3 \\ E_1\,, & F_1\,, & F_2 \end{vmatrix}.$$

$$H^2 = \det \begin{vmatrix} E_1\,, & F_1\,, & F_2 \\ F_1\,, & E_2\,, & F_3 \\ F_2\,, & F_3\,, & E_3 \end{vmatrix}$$

Ora la grandezza del raggio di curvatura di una sezione normale qualunque fatta alla superficie $w =$cost.^{e} vien data dall' espressione

$$\frac{1}{r} = \frac{Du'^2 + 2D_1 u'v' + D_2 v'^2}{\Delta} \quad \text{essendo} \quad \Delta = \sqrt{(E_1 E_2 - F_1^2)};$$

quindi si avrà anche

$$\frac{1}{r} = \frac{Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2}{\Delta H}$$

la quale è l'espressione data dal Sig. Liouville.

Notiamo che supposto essere $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, cioè nel caso delle coordinate curvilinee ortogonali si ha $M=0$, e quindi $D_1 = 0$ non essendolo H, per cui le linee rappresentate dalle equazioni

$$v = \text{cost}^e,\ w = \text{cost}^e; \quad u = \text{cost}^e,\ w = \text{cost}^e;$$

saranno linee di curvatura per la superficie $w =$ cost^e. Analogamente per le altre due superficie.

Lo stesso metodo conduce all'espressione della somma dei raggi reciproci di massima e minima curvatura per una qualunque fra quelle tre superficie. Infatti indicando con r_1, r_2 i raggi di massima e di minima curvatura corrispondenti al punto di coordinate x, y, z della superficie $w =$ cost.^{e} si ha la nota equazione:

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{2D_1F_1-DE_2-D_2E_1}{\Delta^3}$$

quindi si avrà:

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{2MF_1-LE_2-NE_1}{\Delta^3 H}$$

espressione formata colle E_1, E_2, F_1, F_2, F_3, e colle loro derivate. Supposto $F_1=F_2=F_3=0$ si ha:

$$M=0\,,\quad L=\frac{1}{2}E_1E_2\frac{dE_1}{dw}\,,\quad N=\frac{1}{2}E_1E_2\frac{dE_2}{dw}\,.$$

e quindi

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=-\frac{1}{2\sqrt{E_3}}\frac{d\log E_1E_2}{dw}$$

ed analogamente per le altre due superficie.

Nello stesso si potrebbero determinare i raggi dei circoli osculatori delle linee comuni intersezioni delle tre superficie, ed in generale si otterrebbero formate colle E_1, E_2 ..... e loro derivate, tutte quelle espressioni che contengono queste quantità e le D, D_1, D_2.

Pavia il 26 maggio 1853.

TEOREMI DI GEOMETRIA ESTRATTI DA UNA LETTERA DEL SIG. PROF. F. PADULA DI NAPOLI AL COMPILATORE

Signor Professore

1. La superficie inviluppo di un piano che stacca da un corpo dato un segmento di volume costante tocca il piano mobile nel centro di gravità della sezione prodotta nel corpo, base del segmento.

2. I centri di gravità de'segmenti medesimi si trovano sopra una superficie tale che il piano tangente in un punto qualunque é parallelo alla base del segmento, di cui il punto di contatto è centro di gravità. Nel caso di un'ellissoide le dette due superficie sono due ellissoidi simili, e similmente poste alla superficie dell'ellissoide dato.

I medesimi teoremi hanno luogo nel piano : così per una curva di 2.° grado le due curve da sostituirsi alle due suddette superficie sono due curve simili e similmente poste alla data.

Dal secondo di questi teoremi si deduce, come corollario, il teorema del Sig. Clausen che forma la quistione 240 a pag. 357 vol. X degli annali di Terquem e Gerono, finora rimasta senza soluzione. In verità esso dimostra la sola prima parte; cioè : *La posizione di equilibrio di un galleggiante non ha luogo che quando la distanza del centro di gravità del liquido spostato al centro di gravità del corpo è un massimo o un minimo.* Intorno alla seconda parte, cioè: *o quando il centro comune di gravità del corpo e del fluido spostato é alla sua più alta o più bassa posizione*, credo sia una conseguenza del noto principio che in un sistema di pesi in equilibrio il centro di gravità comune occupa il sito più alto o più basso ; ma parmi vi abbisogni qualche rettifica nell'enunciato. E però intorno a ciò ne potrò parlare quando le manderò le dimostrazioni di que'due teoremi.

Napoli 25 maggio 1853.

SOPRA I FENOMENI DI INDUZIONE DELLA BOTTIGLIA DI LEIDA

NOTA DEL D.r R. FELICI.

I teoremi 1°, 2°, 3° indicati nella mia Nota inserita nel mese di ottobre 1851 di questo giornale, si verificano anche nel caso delle correnti, o scariche, indotte dalla bottiglia di Leida. Per ciò dimostrare ho seguito il metodo delle esperienze descritte da me nell'agosto di questo giornale, in quello stesso anno. Ora dovrò, onde non fare inutili ripetizioni, limitarmi a dire i cangiamenti che ho dovuto introdurre nelle esperienze citate, per il caso speciale ora trattato.

In luogo del galvanometro ho impiegata la calamitazione indotta, dall'indotto circuito. Introdussi degl' aghi da cucire nell'asse di un cilindro di vetro, avvolto in spirale dal filo indotto. La mia batteria era di quattro bottiglie, della grandezza ordinaria; e la scarica era misurata da 40° di un elettrometro comune di Henly.

Il metodo mio riducendo tutto a dei casi di equilibrio, fra le azioni contemporanee di due circuiti, non avevo a misurare delle intensità magnetiche; ma bensì dovevo osservare se il magnetismo era indotto o no, ponendo l'ago nella spiralina inducente; e per questo mi servivo di un sistema astatico da galvanometro, davanti a cui portavo l' ago dopo la scarica.

I circuiti erano isolatissimi.

Il più piccolo spostamento nelle condizioni di equilibrio dei miei circuiti bastava, per dare repulsioni di 40° sul mio sistema astatico.

Il diametro dei fili di rame era di $0^m, 006$.

Le *resistenze* dei circuiti erano di $15^m, 00$ dello stesso filo.

Gli aghi avevano $0^m, 048$ di lunghezza, $0^m, 001$ di diametro; scelti d'acciajo non molto temperato, allo stato naturale, e cangiati dopo ogni scarica.

Il magnetismo era sempre indotto nello stesso senso in cui lo sarebbe stato, facendo percorrere il circuito indotto da una corrente continua, nella direzione stessa della corrente della pila.

La conclusione di queste esperienze, è che *l'induzione della scarica della bottiglia di leida è compresa nella stessa teoria matematica dell'induzione elettro dinamica.*

LETTERA DEL SIG. COMM. L. CICCOLINI AL COMPILATORE.

Sig. Professore

Dal palazzo di Malta 18 Giugno 1853.

Sono a pregarla a volermi usare la compiacenza di annunciare ne'suoi Annali la pubblicazione per le stampe di una mia piccola opera intitolata « Osservazioni critiche su quanto scrisse del Calendario il Delambre, e Replica alla sua risposta contro parte delle medesime inserita nel primo libro della sua Istoria dell'Astronomia Moderna di Lodovico Ciccolini Commendatore di s. Giovanni Battista di Orvieto del S. M. O. G. già Direttore della Specola, e Professore di Astronomia nella Università di Bologna, e Socio di più accademie. Roma Tipografia Salviucci 1853. » E perchè Ella Sig. Professore sia informato di quanto concerne l'opera suddetta le dirò, che il fine che io mi proposi dettando queste osservazioni fu quello principalmente di correggere alcuni luoghi fallati; ed illustrarne alcuni altri che abbisognano di schiarimento, affinchè il pubblico traesse maggior profitto dagli scritti di sì celebre autore qual'è il Delambre. Ed essendo che mi paresse di non passare sotto silenzio la noncuranza, e direi quasi il disprezzo ch' egli manifestò ad ora ad ora pel Calendario Gregoriano, giudicai di dare insieme alle osservazioni suddette quei passi, i quali o direttamente, o indirettamente si oppongono all'uso di quello, e di non lasciarli senza risposta, cosa utile a farsi sopratutto pei giovani, af-

finchè non dessero in qualche errore. E perciocchè in tre diversi tempi dette fuori l'autore quelle opere nelle quali trattò ancora del Calendario, così in queste osservazioni seguii l'ordine, col quale dette opere vennero a luce: incominciandole sul suo Compendio di Astronomia, e continuandole via via sull'Astronomia teorica, e pratica, e per ultimo sopra una Memoria di lui inserita nella conoscenza de'tempi per il 1817. Quantunque finalmente correggesse l'Autore nella Memoria suddetta alcune cose dette prima nell'Astronomia teorico pratica, ed anche in quest'ultima ne rettificasse alcune altre che si trovano nel Compendio, ciò non ostante facendosi vantaggioso a chi non possiede tutte tre le mentovate opere di avere le correzioni divisamente, divisamente le scrissi citando per ordine la paginazione loro, e non ommettendo di notare le correzioni fatte quindi da lui.

Queste mie Osservazioni non furono punto gradite dal Cav. Delambre, e scrisse contro le medesime una replica assai pungente, che pubblicò nel primo libro della sua Istoria dell'Astronomia Moderna, alla quale replica io non lasciai di subito rispondere, ma questa mia risposta solamente quest'oggi viene in luce col suddetto titolo di *Osservazioni ec.* Ho creduto ben fatto di unire alla medesima ancora le mie Osservazioni precedenti, affinchè il Lettore sia compiutamente informato di cosa si tratta.

SUR UN PRINCIPE D'ÉLECTROSTATIQUE RECONNU PAR M. LE D.r PALAGI.

LETTRE (*)

DE M. P. VOLPICELLI A M. ARAGO

» Permettez, Monsieur, que je vienne vous rendre compte d'un principe électrostatique, reconnu par M. le D.r Palagi,

(*) Questa lettera del Sig. Prof. Volpicelli, estratta dal Conto Reso dell'Accademia delle Scienze di Parigi, T, XXXVI, p. 1042, è relativa a quanto sullo stesso proposito avvertii nel fascicolo del testè decorso aprile pag. 157. B. T.

de l'Université de Bologne, et que j'ai confirmé moi-même par des expériences ultérieures. Voici l'énoncé du principe : « Un corps d'une nature quelconque, si, en changeant de » place, il demeure isolé, développe une tension électrique, » positive ou négative, selon qu'il s'approchera ou s'éloignera » d'un autre corps. »

» Dès 1788, le physicien anglais William Nicholson lut, à la Société royale de Londres (*), la description d'un mécanisme, dont on obtenait, par le moyen d'une manivelle, les deux états électriques, sans frottement, ni communication avec la terre. L'action de cet instrument était telle, qu'il produisait les deux états électriques par les rapprochements et les éloignements alternatifs de quelques-unes de ses parties, maintenues isolées. Pourtant M. Nicholson ne sut reconnaître dans son instrument qu'une nouvelle machine électrique, sans y apercevoir le principe d'où procédait uniquement l'effet qui en résultait. Quoi qu'il en soit, il me semble que c'est là le premier indice que nous offre l'histoire de l'électricité, touchant le principe de M. Palagi.

» En 1803, M. Erman publia un mémoire intéressant sur l'électrométrie atmosphérique (**), et ses expériences rapportées dans ce mémoire sont toutes dépendantes du principe électrostatique dont nous parlons, et qu'il ne reconnut pas non plus. M. Erman vit de plusieurs manières, qu'en rapprochant les électromètres de Weiss entre eux, et en les rapprochant d'autres corps, on obtenait des indices d'électricité négative; et qu'au contraire, en les éloignant l'un de l'autre, soit du sol, soit de tout autre corps, on avait des indices d'électricité positive.

» Ce physicien reconnut que ce phénomène n'était point du tout dû à l'électricité atmosphérique, contrairement à ce

(*) Philosophical Trans., vol. LXXVIII, p. 403.

(**) Journal de Physique, de Chimie, etc. par Delamétherie, t. LIX, pag. 98.

que Saussure avait pensé antérieurement, d'après une expérience analogue qu'il avait faite; cependant M. Erman se limita à conclure, des faits par lui observés, que la cause devait en être attribuée, soit à la manière dont l'électricité se distribue dans les corps, soit aux atmosphères électriques qui les enveloppent.

» Ce mémoire de M. Erman, tant par les expériences qu'il contient, que par les raisonnements qui les accompagnent, doit être considéré, ce me semble, comme un second pas bien avancé vers le principe de M. Palagi.

» Le physicien français M. Peltier connut les belles expériences de M. Erman, et il en institua d'autres semblables, de 1838 à 1845; les unes et les autres dépendantes du principe énoncé, et qu'il n'aperçut pas. La seule conclusion qu'il tira de toutes ces expériences fut de reconnaître la nécessité d'attribuer à la simple influence cette électricité, manifestée par les électromètres qui servent à la météorologie, et de reconnaître la terre comme la source unique de l'électricité.

» M. Louis Palmieri, physicien napolitain, publia, en novembre 1850, quelques-unes de ses expériences et observations de météorologie électrique, dans lesquelles il eut plusieurs fois l'occasion de reconnaître les effets de la tension électrique, produits *positivement* en éloignant des corps les uns des autres, et *négativement* en les rapprochant entre eux; mais ce physicien ne fit nullement dépendre ces effets du principe déjà exposé.

» C'est M. Palagi qui, en 1852, a su reconnaitre le principe électrostatique déja formulé, et y a subordonné les faits observés par les physiciens dont je viens de parler. Muni d'un bon électroscope de Bohnenberger, et l'employant avec toutes les précautions requises pour bien se servir de cet instrument si délicat, M. Palagi mettait, moyennant un petit fil de cuivre recouvert de soie et verni, un corps quelcon-

que en communication avec l'électroscope; puis, isolant parfaitement le même corps, il l'approchait ou l'éloignait d'un autre corps non isolé, comme du sol, d'un mur, d'un arbre, etc. Il vit qu'en opérant de cette manière dans un espace ouvert, et sans corps environnants, l'électroscope donnait constamment, dans le cas de rapprochement, des signes de tension électronégative, et dans le cas d'éloignement des signes opposés. Il vit aussi que, quelle que fût la direction du mouvement, soit en s'éloignant, soit en se rapprochant du corps isolé, et que, quelle que fût la nature de ce corps, qu'il fût bon ou mauvais conducteur, toujours le même fait se vérifiait conformément au principe plus haut établi.

» M. Palagi répéta ces expériences plusieurs fois, et de plusieurs manières, d'abord à Bologne, puis à Florence, ensuite à Rome, où il voulut bien m'y faire prendre part.

» M'étant convaincu de la vérité du principe proclamé par M. Palagi, et de la justesse de ses expériences; et voulant confirmer moi-même le tout, je reconnus que dans les mouvements nécessaires pour éloigner, ou pour rapprocher un corps isolé, d'un autre corps non isolé, il y avait développement d'une tension électrique, provenant uniquement de l'expérimentateur, isolé lui aussi. Par suite de l'intervention de cette électricité nouvelle, il arrivait quelquefois que les manifestations de l'électroscope étaient, ou toutes deux dans le même sens, ou bien que l'une des deux était nulle, ou très-faible, et à peine sensible. Ainsi, par exemple, dans le cas de développement d'électricité positive par le frottement des habits, et en même temps d'électricité négative par le rapprochement du corps isolé d'un autre corps non isolé, si la première électricité surpassait, ou était égale, ou bien peu inférieure à la seconde, l'indication correspondante électroscopique était ou positive, comme elle eût dû l'être si un éloignement avait eu lieu, ou bien nulle, comme si aucun changement de lieu ne se fût opéré, ou enfin assez faiblement négative.

» Par là je fus conduit à reconnaître pourquoi le phénomène était notablement moins sensible dans un lieu fermé, que dans un lieu ouvert et élevé. En effet, le principe de M. Palagi se manifeste peu dans le premier cas, par suite de l'influence des corps environnant le corps mis en mouvement, sur lequel on expérimente; tandis que dans le second cas, le même principe produit des indications assez sensibles par le manque de l'influence indiquée. Or, la cause perturbatrice du phénomène, c'est-à-dire l'électricité produite par l'expérimentateur, existant dans les deux cas, il s'ensuit que les indications électroscopiques dues au principe, seront bien plus exposées à être neutralisées par celles qui sont dues à la cause perturbatrice, quand on expérimente dans un endroit fermé, que quand on expérimente dans un endroit ouvert.

» Pour faire disparaître cette difficulté, et obtenir de pouvoir facilement reconnaître le principe en expérimentant même dans un cabinet, je reproduisis les rapprochements et les éloignements dans le vide. Je pris à cette fin un tube de verre, long d'environ 1^m, 5, et l'ayant privé d'air, je fis qu' un corps quelconque fut placé dans l'intérieur de ce tube, et que la base métallique de celui-ci communiquat avec l'électroscope. Les choses étant ainsi disposées, il en résultait l'élimination de toute cause perturbatrice provenant de l'électricité atmosphérique, et de celle procédant de l'opérateur. On vit alors le principe dont il s'agit se manifester constamment et d'une manière marquée, quoique l' opération se fît en lieu clos. On vit même que les corps, bons ou mauvais conducteurs, obéissaient indistinctement au principe indiqué.

» Afin d' obtenir ensuite de plus grandes manifestations d'électricité, en opérant dans un lieu ouvert, je fis construire un appareil, dans lequel une tige longue d'environ 1^m,5, terminée à son extrémité inférieure par un globe d'environ 0^m,2 de diamètre, le tout recouvert d'une lame d' étain, pût tourner autour d'un axe horizontal de verre, et isolant parfaitement.

Plaçant ensuite en communication, au moyen d'un ruban de cuivre, l'axe et le globe, avec l'électroscope, je vis le principe de M. Palagi se vérifier toujours exactement, mais d'une manière bien plus prononcée. Je pris ensuite un électromètre condensateur de Volta, et, le tenant en communication avec la tige dans chacune de ses demi-rotations ascendantes, j'accumulai, avec quatre seulement de ces rotations, assez d'électricité pour faire diverger les paillettes de l'électromètre, jusqu'à leur faire toucher les parois intérieures du récipient de verre, dans lequel elles sont placées. En ce cas, l'électricité accumulée etait positive conformément au principe, parce que le globe avec la tige dans chaque demi-rotation ascendante s'éloignait du sol. Je rocueillis aussi l'électricité développée par la tige terminée en globe, dans chacune de ses demi-rotations descendantes, et j'obtins une divergence également grande pour un nombre égal de demi-rotations; en ce cas, l'électricité fut trouvée négative, parce que la tige ainsi que le globe, dans chacune de ses demi-rotations descendantes, s'approchait du sol.

» J'obtins, avec le même instrument, la charge tant positive que négative du carré magique, et de la bouteille de Leyde.

» Le principe électrostatique de M. Palagi étant mis de cette manière dans une parfaite évidence, il reste à l'examiner dans ses lois, c'est-à-dire par rapport à la vitesse et à la nature des mouvements, aux distances, aux surfaces, anx masses, à la forme et à la nature des corps. Il y aura aussi à rechercher la cause du principe lui-même, à examiner, par exemple, si elle ne consisterait pas dans la perturbation de l'équilibre de l'éther par le rapprochement et l'éloignement mutuel des corps. Si l'on réfléchit que l'électricité et le calorique, selon les doctrines modernes de la mécanique moléculaire, sont considérés (*) comme des modifications stati-

(*) Mossotti, Lez. elem. di fis. mat., t. II. Firenze, 1845. Melloni, Sur l'identité des diverses radiations lumineuses, calorifiques et chimiques (Bibl. univ. de Genève, mai 1842).

ques et dynamiques de l' éther environnant les molécules pondérables, n' aurait-on pas un plausible appui pour indiquer la cause du principe que nous avons référé? Ce qui est certain, c'est que, dans les expériences dont il vient d' être parlé, on trouve une autre origine d' électricité entièrement indépendante de l'action chimique. »

GUIDA DEI NAVIGANTI A LUNGO CORSO DI VINCENZO GALLO

Imp, R. Professore di Navigazione.
Trieste 1853. 1 vol. in 8.

ARTICOLO DEL P. A. SECCHI

L'importanza dell'astronomia male può giudicarsi dai popoli continentali, che osservano i fenomeni celesti al più come una curiosità dilettevole, e soltanto assai pregievole quanto che più astrusi e misteriosi sono i risultamenti che se ne hanno. Ma presso i popoli navigatori di ben altra importanza venne essa in ogni tempo tenuta, come quella da cui sola dipendeva la loro prosperità, fortuna, e vita. Quindi è che essi furono sempre i promotori più ardenti di questo studio, e senza il gran problema delle longitudini, forse noi mancheremmo ancora di una esatta teoria lunare. Egli è dietro queste considerazioni che ci gode l'animo in vedere comparire in Italia l'opera di cui diamo conto, la quale ha per iscopo di compendiare in un volume non grande il frutto delle immense fatiche e sforzi dell'umano intelletto, e porgerli sotto l'aspetto di semplici regole pratiche di navigazione ai marinari che si accingono a lungo corso.

L'autore in un altra opera di cui fu già reso conto (*) in questi annali, avea raccolto le istruzioni teoretiche più importanti per formare un completo marino, in questa invece

---

(*) Trattato di Navigazione. Trieste 1851. V. questi Annali tom. 2° an. 1851, pag. 195.

si limita a dare le nude regole pratiche per la soluzione di tutti i problemi più difficili che possono occorrere a bordo d'un bastimento in un lungo viaggio. Queste regole sono chiare, e date senza algoritmo algebrico, il quale non è intelligibile dalla maggior parte de'piloti, però esse sono ben precisate, e le operazioni ben distinte, ed ogni volta illustrate con un esempio, o anche più, secondo il bisogno ed i varii casi. Esposti i metodi generali per qualunque viaggio, trattasi nella 2.ª parte del viaggio nel circolo massimo, e su questo punto importante egli entra assai addentro sviluppando il metodo del Sig. Towson, e dandone le tavole e le figure necessarie che molto facilitano la soluzione pratica del problema. Ma per quanto le teorie sieno esatte, esse sono pur sempre insufficienti, sia perchè sono difficili a trattarsi, sia perchè non sempre si possono avere dati esatti per applicarle, sia perchè circostanze fisiche incalcolabili le rendono insufficienti: quindi nella 3.ª parte gli tratta della così detta navigazione per istima, la quale molte volte è la sola che possa usarsi, ed è poi sempre utile, se non altro per controllare i risultati de'calcoli.

In questa opera Egli dà i più utili avvertimenti per tenere in buon ordine il giornale della navigazione, per premunirsi contro gli errori che possono nascere dalle correnti, e parla de'limiti de'venti periodici o costanti ec. Queste materie sono troppo importanti anche ai fisici, e troppo poco conosciute tra di noi, perchè non sia opportuno di trattenerci alquanto su di esse, credendo di fare in ciò cosa grata ai lettori di questi Annali, e anche all'autore nel dar qui intorno a questa materia un cenno più ampio di quello che il piano della sua opera non gli permetteva di fare. Noi prenderemo le principali informazioni dal colossale lavoro che in parte già eseguito si sta attualmente proseguendo all'osservatorio di Washington negli Stati Uniti sotto la direzione del Sig. Maury, i cui studi sono stati coronati dal più felice

successo, sino a poter predire il numero preciso de' giorni, in cui avrebbe fatto il viaggio da Nuova York a S. Francisco della California, chi avesse seguite le traccie da lui indicate.

Il Sig. Maury è arrivato a classificare entro limiti assai precsi il gran sistema di venti costanti che regnano sulla superficie dell'Oceano: ne ha scoperto dei nuovi periodici, e dietro queste osservazioni ha fissato la direzione generale dei venti del globo, e lo stesso a un dipresso va facendo per le correnti marine (*).

Gli immensi materiali necessari a tal opera sono stati somministrati al Sig. Maury appunto dai Giornali di viaggio ove si registra il corso di ciascuna nave (Log Books), e si tiene esatto conto di tutti i fenomeni meteorologici che occorrono durante il viaggio, notandosi almeno ogni due ore la posizione del vascello, la temperatura dell'aria e dell'acqua del mare, la direzione e forza del vento, e lo stato dell'atmosfera. Il numero di tali registri discussi è di molte migliaia, e ciascuna nave si dà premura di inviargli il suo, ricevendone in cambio una piccola ricompensa o le carte marine già fatte e pubblicate a spese del governo. Lo scopo primario di tanto vasta impresa è quella di servir di guida ai marinari onde possano in ogni stagione scegliere quella via che più presto li conduce al loro termine. Dal confronto delle lunghezze dei viaggi fatta dal Sig. Maury medesimo tra i vascelli forniti delle sue carte, e quelli che non lo sono risulta che i primi sono sempre i più rapidi; e che in totalità la marina americana fa i suoi tragitti in un tempo più breve che tutte le altre nazioni; il che avvantaggia il commercio americano di molti milioni all'anno.

Ma lasciando da parte queste considerazioni noi esporremo

(*) Lent. Maury's Investigations on winds and currents of the sea. App. to Washing. astr. obs. for. 1846 Wash. 1851.

quì brevemente la somma delle conclusioni principali a cui si è giunto in questo lavoro, che più direttamente risguardano la scienza.

È noto che nelle zone intertropicali della Terra esistono di quà e di là dall'equatore due sistemi di venti costanti, e diretti nel nostro emisfero verso il Nord-Est, e nell'altro verso il Sud-Est conosciuti sotto il nome di *venti alisei* (Trade winds) ed è noto come tale sistema di correnti venga spiegato mediante l'azione del calore solare su quelle regioni combinato col moto rotatorio del globo terrestre. Ciò trovasi ben sviluppato anche dai più antichi fisici, e principalmente dal Mussembroek, e ultimamente con molta precisione e chiarezza dal Sig. Herschel nella sua astronomia. Questo sistema fondamentale di correnti aeree del globo ne produce come per reazione due altri verso i poli, spiranti dal Nord-Ovest nel nostro emisfero, e dal Sud-Ovest nell'altro. Ma i limiti precisi di tali correnti e il loro piegarsi allo scontro dei continenti , e la reazione vicendevole che hanno tra loro non era tanto facile a diciferarsi, per mancanza di dati, e tutto si riduceva finora ad una vaga cognizione pratica che ne aveano i marinari. Ora questo è precisamente il vacuo che vengono a riempire le fatiche del Sig. Maury.

Il metodo di riduzione usato in questo lavoro è stato questo. La superficie del mare è stata divisa in quadrati di 5° di lato, e iscritto in ciascun quadrato un cerchio diviso da 32 raggi secondo i punti della bussola : ciascun settore di questo circolo si è diviso in 12 parti ognuna corrispondente a un mese dell' anno. Sono prese quindi dai registri le osservazioni precitate dei venti di 8 in 8 ore del giorno e per ogni osservazione, trovato il circolo corrispondente alla posizione geografica del bastimento e in esso il settore appartenente al rispettivo rombo del vento soffiante , si è segnata una unità nella casella destinata pel mese , in cui è stata fatta quella osservazione. Fatto questo primo lavoro preparativo, per sè già utilissimo ai piloti, onde l'autore lo inti-

tola giustamente *Pilot Chart*, su di esso ne ha costruito un altro più interessante pel fisico. Divisa anche qui la superficie dell'Oceano similmente in quadri di 5° gradi l'uno, ha segnato di grado in grado di latitudine: 1° i limiti superiore ed inferiore dei venti alisei costanti; 2.° i limiti variabili e dubbi dei medesimi, 3° i limiti delle calme equatoriali, 4° i limiti dei venti periodici, e tutti questi limiti sono segnati di mese in mese, in modo che prendendo i mesi per ascisse, e i gradi di latitudine per ordinate si puo vedere a colpo d'occhio per ogni epoca dell'anno qual sia il limite dei prefati movimenti dell'atmosfera. La serie pubblicata finora per l'Atlantico mostra :

1.° che i venti alisei di N. E. occupano una zona estendentesi dall'Est all'Ovest attraverso quell' Oceano , e che ha una larghezza variabile da 17° a 35° di latitudine , la larghezza media è circa 23°, e la sua oscillazione estrema si stende da 3° Sud a 35° Nord secondo la stagione dell'anno.

2.° Questa zona fa due vibrazioni nell' anno. Essa arriva al suo estremo di latitudine Nord comunemente in settembre, quindi rivolgendosi indietro, e seguendo il sole arriva all'estremo australe in marzo ed aprile. Ivi resta stazionaria per due o tre mesi tra i 3° e i 4° di latitudine Nord, poi ricomincia a venire verso Nord, e nei mesi di agosto, settembre ed ottobre, ha luogo il secondo periodo stazionario, il quale assai rare volte o mai non si trova al Sud del parallelo di 9.° di latitudine Nord. Il parallelo di 9° N. può prendersi come il limite medio dell' orlo equatoriale della zona degli alisei N. E.

3.° Gli alisei di S. E. occupano una simile zona nel Sud dell'Atlantico con un moto di oscillazione somigliante. Il limite medio equatoriale di cotesta zona è circa a 3° Nord , invece di essere presso al parallelo di 9° Sud come richiederebbe la corrispondenza colla zona dell'emisfero Boreale.

4.° È un fenomeno notabile, scoperto in queste ricerche,

che gli alisei di S. E. soffiano con maggior forza che non fanno i loro simili nell'emisfero Nord. Essi hanno forza sufficiente per spingere indietro gli ultimi verso il Nord, e penetrano talora sul finire della state fino al parallelo di 9° Nord, mentre da tante migliaia di registri esaminati non si vede che gli alisei N. E. oltrepassino mai il parallelo di 3.° Sud.

5.° Le due zone de'venti sono caratterizzate da simile differenza di forze nel Pacifico. Gli alisei S. E. hanno dunque in generale forza sufficiente da respingere i loro limiti equatoriali dentro l'emisfero Nord, e tenerli quivi dentro la maggior parte dell'anno, mentre il rovescio non mai accade pei venti Nord-Est.

6.° La direzione prevalente degli alisei detti comunemente di N. E. per quanto la danno le osservazioni de'marinari è più propriamente di E. N. E. Apparisce quindi componendo le forze a cui son dovuti tali venti, cioè del calor solare, e della rotazione della terra, che quest' ultima ha più influenza della prima sugli alisei boreali, ma non altrettanto influisce sugli australi. Di più la massa d'aria tenuta in moto dai primi è minore che dai secondi, nel rapporto almeno della circonferenza del parallelo di 9° alla circonferenza dell'Equatore.

7.° Ma mentre gli alisei Nord fanno un angolo coll'equatore di circa 23° (E. N. E) gli alisei sud fanno un angolo di 30° e più col medesimo (S. E. 1/4 E) essendo così il loro arrivo all' Equatore più diretto, e che in conseguenza restando lo stesso l'effetto della rotazione della terra ad eguali paralleli la forza del sole contribuisce maggiormente in fissare la direzione degli alisei australi che dei boreali.

La ragione fisica di tale disparità non è difficile a rinvenirla, essa deriva evidentemente dalla diversa proporzione dei continenti nei due emisferi. La maggior parte di essi sta nell'emisfero nostro, e tra questi le parti più aride del globo

con immensi deserti di sabbia. Queste superficie scaldate inegualmente, devono tirare a se tutto d'intorno l'aria per supplire alle immense colonne ascendenti che si formano sulle loro arene infocate. Questo fatto combina coll'altro osservato pure dal Sig. Maury che in generale anche sul mare la linea isotermica più si accosta all'Equatore nell'Emisfero Sud che nel Nord. Oltre di ciò le terre influiscono in un altro modo sui venti opponendo ostacoli meccanici al loro corso colle catene de'monti, e colla copia degli alberi. Ma la prima di queste due cause è la più forte, a segno di far talora cambiare la direzione dei venti normali.

8.° Le carte mostrano che i continenti hanno una immensa influenza sui venti, e che frequentemente può essa tracciarsi per un migliaio di miglia sul mare aperto. Così l'azione dei raggi solari sui grandi deserti, e pianure dell' Africa, nei mesi dell'estate e dell'autunno, é tanta, che è risentita quasi completamente attraverso l'atlantico tra l'equatore e il 13° parallelo Nord. Tra questo parallelo e l'equatore i venti sono rovesciati indietro, e soffiano come mussoni regolari meridionali per sei mesi. Le scoperta di tali mussoni è messa in tutta piena luce dalle carte : essi soffiano verso la costa dell'Africa dal giugno al novembre inclusivamente. Essi portano le piogge che separano le stagioni in questa parte della costa africana. La regione abbracciata dai mussoni sopra l'oceano é di figura cuneiforme, avendo la sua base sull'Africa e il suo vertice stendendosi fino a 10° o 15° dalla bocca del fiume delle Amazoni.

I venti possono a questo modo darci un indizio dell'interno de'continenti, e il confronto dell'America meridionale coll'Africa è assai palpabile, la prima non influendo notabilmente sui venti può prevedersi dover esser il suo interno umido e ricco di vegetazione, mentre l' ultima deve essere nuda e sterile. Questa stessa sterilità e aridità del centro non è del tutto senza vantaggio per l'Africa stessa: poichè il

forte calore che concepisce facendo ripiegare indietro i venti, fa che regnino sulle coste piogge periodiche senza le quali il clima sarebbe intollerabile all'uomo. Senza questo tutta la zona degli alisei sarebbe forse una regione di mera evaporazione senza pioggia di sorta alcuna. Nuovo magnifico esempio fra i tanti che si incontrano sullo studio de'grandi fatti naturali in cui la natura reagendo sopra se stessa, giunge ad un equilibrio senza cui essa sarebbe distrutta dalle proprie forze. Queste carte mostrano in fatti che le regioni dell' oceano occupate dagli alisei sono regioni senza pioggia, tranne nelle vicinanze delle terre, e che in generale sotto l'aspetto udografico le regioni loro sono piuttosto di evaporazione che di precipitazione; mentre accostandosi al polo avviene il contrario, e ivi trovansi le regioni, ove la precipitazione supera l' evaporazione, del che se ne ha un bell' esempio nelle grandi masse d' acqua dolce dei laghi americani, nei quali il fiume San Lorenzo serve a scaricare l'eccesso della pioggia sopra l'evaporazione. Similmente nell'altro emisfero, presso il Capo Horn si trovano pioggie immense giunte ad oltre 12 piedi in 41 giorni. Delle quali cose non è difficile intendere la ragione fisica.

9.° Vi è tra i due sistemi de'venti una regione di calme, conosciute sotto il nome calme equatoriali, essa ha una larghezza media di 6° di latitudine. È in questa regione che ascende l'aria portata all'equatore dai venti di N. E. e di S. E. sollevata dalla dilatazione dovuta al calor solare. Queste calme coprono una regione di costante precipitazione, ed essa va oscillando sulla superficie dell'oceano in consonanza coi venti alisei. Nei mesi della state si trova tra i paralleli di 8° e 14° di lat. N., e nella primavera tra 5° S. e 4.° N. Mediante queste carte può il navigatore sapere quali paesi hanno due stagioni di pioggia e quali una, e quali sono i mesi di pioggia per ciascun sito, che accompagnano la calma.

Se le zone delle calme, e dei venti avessero differenti colori sul globo, un osservatore collocato a distanza abbastanza grande dal nostro pianeta, le potrebbe vedere oscillare da una all'altra parte dell'equatore nel corso di un anno, ma in modo che i loro limiti di declinazione non sarebbero tanto distanti quanto i tropici. Vedrebbe, come esse stanno stazionarie presso i tropici per circa 3 mesi, e nel corso di altri tre mesi compiono il tragitto del loro corso rapidamente percorrendo l'oceano. Per ciò che risguarda la direzione precisa di queste due zone, quella dei venti S. E. presenta il suo orlo settentrionale inclinato alquanto all'equatore; cominciando presso la costa dell' Africa e tracciandone il corso verso l'America del Sud, essa si accosta all' Equatore sotto un angolo di circa 15°, e l'orlo equatoriale della zona di S. E. nell'atlantico si stende da O 15° N ad E 15° S. Guardando poi la zona boreale, un tale osservatore la vedrebbe simile, ma non in tutto identica all'altra australe: presso il lato africano essa dista più dall'Equatore verso cui si dirige sotto un angolo di 10° (O $^1/_4$ S) finchè giunta al meridiano di 40° O. (long. di Greenwich) ivi si rivolge al nord, e segue la direzione O. N. O. Quì si incomincia a sentire l'influenza del continente americano sui venti; e le pianure del Texas e le circonvicine sono insufficienti a cambiare nei mesi estivi nel golfo del Messico la direzione del N. E. Le due zone sono adunque separate da uno spazio cuneiforme la cui base si rivolge all'Africa, e questa zona è occupata dalle calme equatoriali.

La zona degli alisei settentrionali confina dalla parte del Nord con una zona di calme, e con un altra zona simile confinano al sud i venti S. E. Al di là di queste zone tropicali, e verso le regioni polari sono due altre larghe zone che sono le opposte ai venti alisei, cioè i S. O. nel emisfero Nord e i N. O. nell'emisfero Sud. Il limite equatoriale delle predette calme è presso i tropici, ed ha una larghezza

di circa 10 in 12°: da un lato di queste zone il vento soffia perpetuamente verso l'equatore dall'altra la sua direzione è verso i poli. Esse possono dunque dirsi nodi del sistema generale della circolazione atmosferica. Queste pure sono zone di precipitazione e di pioggo periodiche di stagione, quali si osservano nel Chilì e nella California, assai costanti e marcate, benché non quanto quelle delle calme equatoriali.

10.° Dal parallelo di 40° in su verso il polo, nell'emisfero Nord i venti dominanti sono i venti S. O. detti di passaggio, o più comunemente *occidentali* (Westerly), e questi prevalgono sugli *orientali* (Easterly) nel rapporto di due ad uno. Quindi, se ammettiamo che in due giorni i venti occidentali portino più aria verso le regioni polari che gli orientali, ne nasce il bisogno di ammettere una corrente superiore che riporti all'equatore l' eccesso dell' aria che i primi tendono ad accumulare verso il polo. Combinando tutti i dati dell' osservazione coll'analogia di ciò che deve succedere in forza di quest'ultima corrente, risulta la seguente generale circolazione dell'aria: Una corrente ascendente al polo, e quindi un'altra superiore diretta dal polo alle regioni delle calme tropicali: quivi una discesa e una corrente inferiore rasente la terra (gli alisei p. e. N. E) diretta alla regione delle calme equatoriali. Ivi una nuova ascensione mediante la quale la corrente giunta in alto si versa da una e dall'altra parte verso i due poli, e scorrendo superiormente giunge fino alla regione tropicale. Qui nuovamente discende, e giunta in terra fluisce ad ambi i lati verso l' equatore, e verso i poli. La parte che fluisce verso questi (i venti S. O. di passaggio), si accosta al polo in curve spirali lossodromiche ove sale per ricircolare ancora. Questo è il risultato che si ricava dalle immense ricerche fatte finora, e che forse è men semplice di quello che si sarebbe creduto. Ulteriori osservazioni fatte specialmente nei mari circumpolari potranno rischiarare la circolazione dell'atmosfera in queste parti ove essa finora è poco più che congetturale.

Arrivato a stabilire questa circolazione, l'illustre direttore domanda se la gran regione delle calme equatoriali ove regna la corrente atmosferica ascendente, sia veramente di tal natura da dividere le arie dei due emisferi in modo che quella che viene dal nord giunta in alto si rovesci pure al nord, e quella dal Sud pure al Sud, ovvero non accada che le masse d'aria portate dai venti nordici ascendendo non passino al Sud, e quelli del Sud al Nord producendo una circolazione d'aria costante dall'uno all'altro emisfero. Le ragioni di sospettare di quest'ultimo corso sono, prima di tutto la congruenza di un qualche mescolamento delle arie dei due emisferi senza di cui se esse restassero perpetuamente separate potrebbero finalmente divenire tanto diverse in composizione, o da riuscire incapaci di sostenere la vita umana, e ciò a cagione della diversissima distribuzione di terra, vegetali ed animali che ha luogo nei due emisferi. Parecchi fatti vengono all' apoggio di questa congetturata circolazione. In quella stagione in cui il sole più sferza l' emisfero Sud la quantità di pioggia che cade nel emisfero Nord è la massima : è dunque probabile che tanto vapore sia sollevato colà quanto ne è precipitato di quà. Di più la superficie evaporante dell'acqua é maggiore nell'emisfero Sud , eppure tutti i grandi fiumi, che possono considerarsi come i grandi udometri della natura, sono nell'emisfero Nord. Ma un fatto che pare decisivo si è quello scoperto dal famoso Erhenberg il quale ha trovato che nelle pioggie di ceneri ed altre polveri straordinarie cadute nel nostro emisfero, come la polvere delle Isole del Capo verde, e quelle di Genova e di Lione, si trova una grande quantità di nicchi d'infusorii che paiono esclusivamente appertenere all'America Meridionale. Dovremmo adunque ammettere nell'atmosfera tre grandi nodi nelle regioni delle calme equatoriali e tropicali, e la stessa massa d'aria proveniente dal vento S. E. sollevandosi all'equatore, passerebbe nel nostro emisfero come corrente superiore scor-

rendo fino alle regioni delle calme del tropico del Cancro; quivi discendendo progredirebbe (almeno in parte) verso il polo, ove pel moto vertiginoso della terra ascendendo scorrerebbe superiormente e arriverebbe nuovamente al tropico del Cancro: quì discendendo andrebbe all' equatore per ivi passare all'emisfero australe, e ivi compiere una simile circolazione. Questo sistema indicato dai fatti potrà essere da osservazioni posteriori o confermato, o modificato, ma intanto non cessa di essere interessante nel fisico il sapere il problema che dovrà mirare di sciogliere. Oltre la causa del calore che certamente è la più influente in questa circolazione, domanda esso egualmente, se nulla possa influirvi il magnetismo terrestre? Egli osserva che il Sig. Faraday ha trovato l'ossigene esser magnetico, e il suo magnetismo variare colla temperatura, non esser dunque impossibile che le masse di ossigene circolante, esposte successivamente a varia temperatura, e che formano $^1|_5$ dell'atmosfera possano esser soggette all'influenza del magnetismo terrestre, in guisa che questa forza possa contribuire a mantenere la circolazione delle masse da un polo all'altro. Queste però non sono che congetture, non disprezzabili certamente, ma che abbisognano di ulteriori conferme. Per minimo che sia il magnetismo dell'ossigene può crescere la sua efficacia colla massa, a quella guisa che l' azione della gravità d' insensibile che quasi si trova nelle piccole masse, acquista tanta efficacia nelle grandi.

Non meno delle correnti dell'atmosfera interessano ai navigatori quelle dell'oceano stesso. Sono già note dai più antichi tempi molte di queste correnti, che a guisa di fiumi scorrono isolate in mezzo al mare tra liquide sponde che pochissimo o nulla partecipano al loro moto. La più famosa di queste e la più vasta è quella detta corrente del Golfo (Gulf stream) al sito dove questa esce dagli stretti della Florida ha le acque di cupo color turchino d'indaco, e la linea di con-

giunzione di essa colla acque verdastre dell' oceano può visibilmente tracciarsi per centinaia di miglia. Anche colà ove l'occhio non può più distinguere il limite delle due acque viene esso manifestamente tracciato dalla temperatura delle medesime. I recenti lavori del Sig. Maury in cui sono discusse molte migliaia di osservazioni sulla temperatura del mare, mostrano che questa corrente tiene in movimento quasi la quarta parte delle acque dell'atlantico. Uscita essa dagli stretti della Florida ed allargandosi nell'atlantico costeggia per gran tratto gli Stati Uniti; indi si getta verso l'Europa per la via del Gran Banco di Terranova e di là stendendosi alla baia di Biscaia alle Isole Britanniche, viene a mitigare colle sue tiepide acque il rigore del clima settentrionale Europeo. Si assomiglia essa ad immenso stendardo che fissato sur una estremità presso il golfo del Messico, viene stendendosi ondeggiando sulla superficie dell'oceano, diramandosi talora in varie direzioni, ma sempre conservando il suo carattere fondamentale dell'elevata temperatura equatoriale.

Oltre questa corrente di acqua calda che viene dall'equatore ne trova il Sig. Maury un altra di acqua fredda che viene dal polo, e che in alcuni siti si insinua a modo di penisola tra i rami dell'altra più calda, e la differenza di temperatura che trovasi nelle acque del mare per la variazione di 2 o 3 gradi di posizione geografica sale talora fino a 20° del term. di Far. Il complesso di queste osservazioni ci presenta svelato il mistero delle grandi nebbie che regnano nell'estensione del mare che ricopre il gran banco di Terranuova. Queste nebbie che si stendono sopra una superficie di molte migliaia di miglia quadrate, devono la loro origine ad un braccio della corrente del polo che si stende come una penisola dentro due altre braccia della corrente del golfo e il miscuglio di due arie diversamente calde, e sature di vapore, non può a meno di non produrre sul mare fenomeni analoghi a quelli che in simili circostanze sono prodotti sui

continenti. Queste correnti di acqua calda sono potenti agenti meteorologici, e può tracciarsi l'influenza della corrente del golfo sulla parte orientale dell'atlantico nei non rari temporali che ivi hanno luogo nell' inverno fino alla latitudine di 55° N, mentre sono affatto inusitati in quella stagione in altre parti ove quella corrente non passa.

L'autore crede insufficiente a spiegare queste correnti, i soli venti alisei, ed è visibile dietro il già detto che questi venti non possono esserne almeno l'unica causa, attesochè essi produr non potrebbero la fredda corrente del Nord, la quale è tanto forte che continua il suo corso non interrotto verso l'equatore sotto alle acque calde di quella del golfo, come lo mostrano le numerose osservazioni della temperatura dell'acqua a varia profondità da lui discusse.

Non é difficile a concepire come una massa d'acqua calda proveniente dall' equatore possa avere un corso quasi indipendente dal resto dell' oceano, se osserveremo che nelle grandi masse non così facilmente si stabilisce l'equilibrio di temperatura e di densità come nelle piccole, e che la specifica leggerezza dell'acqua più calda può tenerla galleggiante sulla più fredda. Un esempio ovvio di ciò lo abbiamo nei nostri fiumi di acqua dolce, cui vediamo insinuare le loro acque molto addentro il mare, in modo da lasciare tracciata la linea di confine tra le due acque visibilissima all' occhio per la diversità del colore. Ma non così facilmente s'intende come possa fare lo stesso la corrente più fredda del Nord, che parrebbe dover essere più pesante specificamente. Tuttavia anche questo resterà senza difficoltà se si avvertirà l'altro fatto scoperto in queste ricerche, che la linea di confine delle acque aventi lo stesso grado di temperatura oscilla sulla superficie dell'oceano, secondo le varie stagioni, appunto come fanno i limiti dei venti. La corrente fredda guadagna sopra la calda in latitudine all' epoca della fusione dei ghiacci polari per l'avvicinarsi del sole al polo. Questo

fatto ci mostra la connessione della corrente colla fusione de' ghiacci la cui acqua essendo specificamente più leggiera dell' altra perchè *più dolce*, ossia men salva, può galleggiare sul resto. Ma quando le due correnti, la calda e la fredda, vengono ad incontrarsi, allora questa passa sotto all' altra come già abbiamo detto esser dato dall' osseravzione. Al sollevamento della corrente fredda può anche contribuire il rialzamento del fondo del mare in alcuni siti, come appunto sul banco di Terra Nuova, ed in altri luoghi ove scontransi alcuni come immensi laghi d'acqua più fredda di quella che li circonda, e che ivi non può essersi adunata per corrente superficiale. Lo scandaglio e la struttura de'vicini continenti hanno svelato in effetto essere ivi il fondo del mare più elevato. La direzione di queste correnti può come si è detto molto influire sui climi dei vicini continenti. Infatti l'acqua dell'oceano è più calda presso l'Europa a 60 o 65° di latit. che non presso l'America a 40 o 45°.

Parrebbe dal complesso dei fatti, che tutto il sistema delle correnti acquee fosse per la massima parte prodotto e conservato dalla causa stessa che produce le correnti aeree degli alisei, ma che la superficie della gran corrente del golfo non fosse piana, anzi convessa a modo di tetto, e che ad essa si debba il trasporto delle alghe da questa parte dell'oceano; mentre nulla se ne vede dall'altra.

Concluderemo questo breve ragguaglio con riportare l'invito che il Sig. Maury fa ai meteorologisti continentali, di osservare attentamente quali sieno i venti piovosi nelle loro località, per potere mediante questo dato arrivare a scoprire qual sia la parte del mare, donde possa credersi provenire l'acqua che bagna in forma di pioggia ciascun continente. E noi faremo voti perchè una opera così vasta incominciata con tanto successo sia promossa e continuata con lo stesso zelo, onde fu incominciata, corona della quale sarà certamente la risoluzione decisiva di quella parte di questo gran

problema dei venti e delle correnti che resta ancora congetturale. Se i navigatori italiani seguiranno i consigli del Sig. Gallo potranno ancor essi contribuire a sì gran lavoro, e concorrere ad una impresa sì utile e sì gloriosa.

LETTERA DEL SIG. PROF. G. BELLAVITIS AL COMPILATORE

Signor Professore

La Memoria del Dott. Forti, in cui egli accenna ad una teoria del ch. Prof. Mossotti, mi fa ricordare una maniera di esporre la teoria degli strumenti ottici data dal Moebius mediante le frazioni continue, la quale può ridursi tanto semplice da dover simpiazzare la teorica delle lenti che suolsi dare negli elementi di Fisica; essa non riguarda le aberrazioni di sfericità o di cromatismo (al quale si riferisce la teorica del Professore di Pisa) ma considera soltanto la parte elementare del problema.

Sia X un punto mobile sull'asse d'un istromento ottico e voglia determinarsi la corrispondente posizione del punto x, nel quale convergono i raggi emanati da X; cioè si cerchi la relazione delle posizioni dell'*oggetto* X e della sua *immagine* x. Adopreremo questo solo principio che i raggi partenti da un punto Y vicinissimo all'asse convergano, dopo avere attraversato l'istrumento ottieo, in altro punto y. Supponiamo che XY sia una cortissima retta perpendicolare all'asse Xx, tale sarà pure la xy, a motivo della simmetria del sistema intorno all'asse. I raggi paralleli all'asse, che entrano per l'obbiettivo vengano a convergere dopo usciti per l'oculare nel punto f, che diremo il *foco oculare*; e diremo *foro obbiettivo* il punto F dell'asse, dal quale emanano raggi che attraversando lo strumento divengono paralleli.

Per fissare le idee supponiamo che i punti X, F, f, x

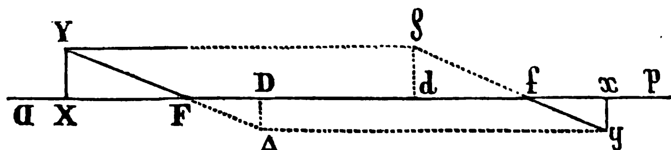
sieno distribuiti sull'asse nell'ordine, con cui sono nominati; il che per esempio avviene quando si tratti di una sola lente convergente: del resto le formule si applicheranno ad ogni altro caso, purchè si tenga conto della direzione delle rette, e nella loro indicazione con due lettere s'intenda sempre che la retta sia diretta dalla prima lettera alla seconda; cioè si seguano quelle convenzioni, che io adoperai nel metodo delle equipollenze, e che ora si vanno generalmente adottando. Tutte le seguenti equazioni sono inoltre vere equipollenze.

Sul raggio emanato dal foco F, e formante coll' asse un angolo piccolissimo, si segni quel punto Δ, che é intersezione delle prolungazioni del raggio incidente, e del raggio emergente (cui dicemmo parallelo all'asse), e sia D la projezione del punto Δ sull' asse F*f*. Così pure per un raggio incidente parallelo e vicinissimo all' asse dicasi δ il punto dove la sua prolungazione incontra il raggio emergente, che va a concorrere nel foco oculare *f*; e si abbassi la δ d perpendicolare all'asse FDd*f*.

Consideriamo adesso due raggi emanati dal punto Y (vicinissimo ad X) l'uno passante pel foco obbiettivo F si prolunghi e si tagli colla DΔ in Δ; questa DΔ sarà equipollente (eguale, parallela, e rivolta nello stesso verso) alla immagine *xy*, poichè il raggio FΔ esce dall'istrumento parallelo all'asse e discostone di DΔ; così la similitudine dei triangoli FXY, FDΔ ci darà

(1) $\quad\quad$ $FX : FD = XY : xy.$

Un secondo raggio emanato da Y sia parallelo all'asse,



esso diventerà dopo attraversato l'istrumento il raggio $\delta f y$, e la dδ sarà equipollente all'oggetto XY; perciò i triangoli simili fdδ , fxy daranno

$$(1') \qquad XY : xy = f\mathrm{d} : fx \, .$$

Combinando queste due proporzioni si ha la

$$(2) \qquad FX : FD = f\mathrm{d} : fx \, ,$$

la quale dà la desiderata relazione tra le posizioni dell' oggetto X e dell'immagine x; mentre le prime stabiliscono il rapporto delle loro grandezze lineari, indicando inoltre che l'immagine è capovolta quando le FX, FD sono di segno opposto.

Potremmo notare che l'oggetto e l'immagine (nelle porzioni prossime all'asse) sono due figure *collineari*, od *omografiche* che voglian dirsi; i piani condotti per F ed f perpendicolarmente all'asse ne sono i *piani d'inversione*; cioè potremmo notare che l'immagine é un *bassorilievo* dell'oggetto; ma ciò ci trarrebbe lungi dal nostro argomento. I punti X, x li diremo tra loro *corrispondenti*.

La retta FD considerata in grandezza ed in direzione la diremo la *distanza focale obbiettiva* dell' istrumento , e la fd ne sarà la *distanza focale oculare*. I punti D, d possono dirsi i *punti di eguaglianza obbiettivo ed oculare*, poichè se l'oggetto è in D, l'immagine si trova in d, ed è ad esso equipollente. Oltre questi punti possono notarsi i punti $\mathfrak{q}$, p , nei quali l'oggetto e l'immagine sono bensì uguali, ma capovolti; in forza delle (1) essi sono determinati da $F\mathfrak{q} = -FD$, $f\mathrm{p} = -f\mathrm{d}$.

Se ad un sistema di lenti o di specchii, il cui effetto sia espresso dai due fochi F_1 , f_1 , e dalle due distanze focali $F_1 D_1$, $f_1 d_1$, susseguiti un altro sistema espresso dai fochi F_2 , f_2 e dalle distanze focali $F_2 D_2$, $f_2 d_2$, in guisa che l'immagine $\eta\,\xi$ prodotta dal primo sistema faccia nel secondo

sistema l'ufficio d'oggetto, l'unione dei due sistemi ne costituirà un altro, che avrà i fochi F, f determinati dalle equazioni

(3) $\mathrm{F_1F} = \mathrm{F_1D_1} \,.\, f_1\mathrm{d_1} : f_1\mathrm{F_2}$, $f_2f = \mathrm{F_2D_2} \,.\, f_2\mathrm{d_2} : \mathrm{F_2}f_1$.

e le distanze focali

(4) $\mathrm{FD} = \mathrm{F_1D_1} \,.\, \mathrm{F_2D_2} : \mathrm{F_2}f_1$, $f\mathrm{d} = f_1\mathrm{d_1} \,.\, f_2\mathrm{d_2} : f_1\mathrm{F_2}$;

dopo di che tra l'oggetto XY e l'ultima immagine xy avranno luogo le solite relazioni

$$(1,\ 2) \qquad \mathrm{XY} : xy = \mathrm{FX} : \mathrm{FD} = f\mathrm{d} : fx.$$

Infatti il foco oculare f del sistema complessivo è il punto di concorso dei raggi paralleli all' asse incidenti nel primo sistema, il quale li fa convergere in f_1 ; perciò nel secondo sistema f_1 ed f sono due punti *corrispondenti*, e quindi la (2) dà

$$\mathrm{F_2}f_1 : \mathrm{F_2\,D_2} = f_2\,\mathrm{d_2} : f_2f ,$$

che è la seconda delle (3). La prima si dimostra in egual modo, osservando che nel primo sistema sono due punti *corrispondenti* F ed $\mathrm{F_2}$; giacchè nel sistema complessivo i raggi emanati da F deggiono uscir paralleli, il che non potrebbe avvenire se il primo non li convergesse in $\mathrm{F_2}$ foco obbiettivo del secondo sistema.

Rispetto al sistema complessivo sono due punti corrispondenti $\mathrm{F_1}$ ed f_2, perchè il primo sistema rende paralleli i raggi emanati dal suo foco obbiettivo $\mathrm{F_1}$, ed il secondo sistema converge tali raggi paralleli nel suo foco oculare f_2; dunque sarà

$$(5) \qquad \mathrm{FF_1} : \mathrm{FD} = f\mathrm{d} : ff_2.$$

Per trovare un'altra equazione, che serve a determinare i punti *d'eguaglianza* D, d del sistema complessivo, osserviamo che se l'oggetto DE dà mediante il primo sistema l'immagine $\xi\,\eta$, la quale considerata come oggetto generi mediante

il secondo sistema l'immagine $d\,e$ si hanno le equazioni

$$DE : \xi\eta = F_1 D : F_1 D_1 = f_1 d_1 : f_1 \xi ,$$

$$\xi\eta : de = F_2 \xi : F_2 D_2 = f_2 d_2 : f_2 d ;$$

inoltre per la proprietà dei punti *d' eguaglianza* dev' essere $DE = de$; dunque

$$(6) \qquad F_1 D : F_1 D_1 = f_2 d : f_2 d_2 .$$

Queste (5) (6) conducono necessariamente alle due (4), perchè la (5) è una conseguenza delle quattro (3) (4), ed inoltre sommando le due prime, o le due seconde tra le (3) (4) si hanno le

$$F_1 F + FD = F_1 D = F_1 D_1 (f_1 d_1 - F_2 D_2) : f_1 F_2 ,$$

$$f_2 f + f d = f_2 d = f_2 d_2 (f_1 d_1 - F_2 D_2) : f_1 F_1 ,$$

delle quali è immediata conseguenza la (6).

Prima di compiere ciò che riguarda un sistema di specchii o di lenti consideriamone partitamente questi elementi. I raggi di luce paralleli cadenti sopra uno specchio concavo sono riflessi nel punto f, che sta alla metà del raggio parallelo ad essi; questo f è perciò il foco *oculare*, e ne è anche il foco *obbiettivo* F, perché i raggi da esso emanati sono riflessi parallelamente. I punti di *eguaglianza* D, d coincidono essi pure sulla superficie dello specchio, poichè ivi oggetto ed immagine sono una stessa cosa. Dunque uno specchio ha i suoi due fochi coincidenti, le distanze focali FD, fd sono esse pure coincidenti ed uguali alla metà del raggio di curvatura. Il centro di curvatura $\mathfrak{a}$ è dato da $F\mathfrak{a} = -FD$; e l'oggetto posto in tal punto produce un'immagine a sè uguale ma capovolta. Le stesse cose valgono, ben s'intende, per lo specchio convesso col centro $\mathfrak{a}$, ed il raggio $\mathfrak{a}$D, nel cui punto di mezzo coincidono i due fochi F, f. La relazione tra l'oggetto e l'immagine è sempre data dalle (1) (2).

Abbiasi una superficie dirimente D_1M sferica col centro C_1,

ed i raggi di luce entrino parallelamente a $D_1 C_1$ dal vuoto ad un mezzo dotato dell' indice di refrazione n. Il raggio che colpisce la superficie nel punto M vicinissimo all' asse $D_1 C_1$ si rifrange in Mf_1, in guisa che i lati Mf_1, Cf_1 del triangolo $C_1 M f_1$ sono proporzionali ai seni degli angoli d'incidenza e di refrazione; quindi si ha

$$M_1 f_1 = n . C_1 f_1 ,$$

ossia, per la vicinanza di M a D_1,

$$D_1 f_1 = n (D_1 f_1 - D_1 C_1) ;$$

perciò la distanza focale oculare è

$$f_1 d_1 = f_1 D_1 = \frac{n}{n-1} C_1 D_1 .$$

Similmente si trova la distanza focale obbiettiva

$$F_1 D_1 = \frac{1}{n-1} D_1 C_1 .$$

Se i raggi di luce dopo essere entrati attraverso la predetta superficie D_1 nel mezzo più denso, escano di nuovo nel vuoto attraversando la superficie D_2 col centro C_2, rispetto a questa seconda superficie avremo le distanze focali

$$F_2 D_2 = \frac{n}{n-1} C_2 D_2 , \qquad f_2 D_2 = \frac{1}{n-1} D_2 C_2 ,$$

le quali si ottengono mutando nelle precedenti formule n in $\frac{1}{n}$. Determinato così l'effetto di ciascuna refrazione, le formule (3) (4) ci daranno i fochi e le distanze focali della *lente* compresa tra le predette due superficie sferiche D_1, D_2. Trovasi con facile calcolo, posto $\frac{1}{n-1} = m$, che ambedue le distanze focali sono

$$FD = -fd = m(m+1) D_1 C_1 . C_2 D_2 : F_2 f_1 ,$$

essendo

$$F_2 f_1 = (m + 1)(D_1 C_1 + C_2 D_2) - D_1 D_2 ;$$

poscia i punti di *eguaglianza* della lente sono dati da

$$D_1 D = m . D_1 C_1 . D_1 D_2 : F_2 f_1 , \quad dD_2 = m . C_2 D_2 . D_1 D_2 : F_2 f_1 ,$$

e la loro distanza è

$$dD = C_2 C_1 . D_1 D_2 : F_2 f_1 .$$

Queste formole danno la compiuta teorica della lente tenendo conto della sua grossezza $D_1 D_2$.

Per esempio se le due superficie della lente convesso-concava abbiano il centro comune C, in esso si riuniscono i due punti D, d, e le distanze focali sono

$$- FC = fC = (m + 1) D_1 C . D_2 C : D_1 D_2 ;$$

la lente è perciò divergente.

Non solamente in ogni specchio ed in ogni lente, ma eziandio, in forza delle (4), in ogni combinazione di lenti e di specchii le due distanze focali FD, fd sono eguali, e rivolte nello stesso verso od in verso opposto secondo che il sistema contiene un numero dispari, o pari di specchii.

Dicemmo che in un sistema ottico l'immagine è generalmente *collineare* all'oggetto, dobbiamo ora considerare quegli speciali sistemi, nei quali l'immagine è *affine* all'oggetto. Se si riuniscano due sistemi

$$F_1 D_1 \quad f_1 d_1 \quad , \qquad F_2 D_2 f_2 d_2$$

in guisa che il foco oculare del primo coincida col foco obbiettivo del secondo, cioè sia $f_1 F_2 = 0$, le formule (3) (4) non servono più a qualificare il sistema complessivo. Segniamo con i, j i rapporti delle distanze focali oculare obbiettiva, ed obbiettivo oculare dei due sistemi parziali, cioè poniamo

$$(7) \qquad f_1 d_1 : F_2 D_2 = i , \qquad F_1 D_1 : f_2 d_2 = j .$$

Fra l'oggetto XY, l'immagine $\xi\eta$ prodotta dal primo sistema,

e l' immagine xy prodotta dal sistema complessivo hanno luogo le relazioni (1), che a motivo della coincidenza di f_1 con F_2 divengono

$$XY : \xi\eta = F_1X : F_1D_1 = F_2d_1 : F_2\xi ,$$

$$\xi\eta : xy = F_2\xi : F_2D_2 = f_2d_2 : f_2x ,$$

e danno immediatamente

$$(8) \qquad XY = i \,.\, xy ;$$

cioè i è il costante rapporto dell'oggetto all'immagine.

In quanto alla relazione di posizione dell' oggetto e dell' immagine essa pure si deduce dal prodotto di due delle precedenti proporzioni, cioè

$$XY : xy = F_1X \,.\, f_1d_2 : F_1D_1 \,.\, f_2x = i ,$$

e mediante la seconda delle (7) si avrà

$$(9) \qquad F_1X = ij \,.\, f_2x \,.$$

Scelto il punto P in guisa che

$$(10) \qquad F_1P = ij \; f_2P$$

si ha più semplicemente

$$(11) \qquad PX = ij \,.\, Px \,.$$

Ogni sistema espresso dalle (8) (11) è un *cannocchiale*. L' immagine *è affine* all'oggetto, perchè le loro dimensioni perpendicolari all'asse hanno il rapporto $1 : i$, quelle parallele all'asse il rapporto $1 : ij$. Se l' oggetto è a distanza infinita lo è pure l'immagine; il rapporto

$$j = \frac{xy}{Px} : \frac{XY}{PX}$$

delle loro grandezze *angolari* dicesi l'*ingrandimento* del cannocchiale.

Se sia $ij = 1$, cioè

$$F_1D_1 \,.\, f_1d_1 = F_2D_2 f_2d_2 \cdot$$

invece della (11) la (9) ci darà

$$(12) \qquad Xx = F_1 f_2 ,$$

cioè l'immagine è più vicina all' occhio dell' oggetto di una lunghezza costante.

Il più semplice dei cannocchiali è un cilindro di vetro $D_1 D_2$ tagliato in D_1 a superficie convessa col centro C_1, ed in D_2 a superficie concava col centro C_2, ed in D_2 a superficie concava col centro C_2; vedemmo che le distanze focali dipendenti dalla prima refrazione sono

$$F_1 D_1 = m \,.\, D_1 C_1 , \quad f_1 d_1 = -(m+1) D_1 C_1 ,$$

e che quelle per la seconda sono

$$F_2 D_2 = -(m+1) D_2 C_2 , \quad f_2 D_2 = m \,.\, D_2 C_2 ;$$

dunque se

$$F_2 f_1 = (m+1)(D_1 C_1 - D_2 C_2) - D_1 D_2 = 0 ,$$

ossia se

$$n \,.\, C_1 C_2 = D_1 D_2 ,$$

si ha un cannocchiale determinato da

$$i = j = D_1 C_1 : D_2 C_2 .$$

Siccome in ogni combinazione di lenti e di specchii le due distanze focali sono uguali, così negli ordinarii cannocchiali è $j = i$.

Due cannocchiali posti l'uno dopo l'altro danno origine ad altro cannocchiale. Il primo sia individuato da

$$XY = i_1 \,.\, \xi\eta , \qquad P_1 X = i_1 j_1 \,.\, P_1 \xi ,$$

ed il secondo da

$$\xi\eta = i_2 \,.\, xy , \qquad P_2 \xi = i_2 j_2 \,.\, P_2 x$$

avremo evidentemente

$$XY = i_1\, i_2 \,.\, xy = i \,.\, xy ,$$

e si troverà $PX = ij \,.\, Px$, essendo

$$i = i_1 i_2 \ , \ j = j_1 j_2 \ (i_1 j_1 - 1)PP_1 = (i_1 j_1 - ij)PP_2 \, .$$

Quando i raggi di luce entrano perpendicolarmente ad un piano in un mezzo dotato dell'indice di refrazione n; quest' unica refrazione costituisce il cannocchiale qualificato da $i = 1$, $j = \frac{1}{n}$. Che se dopo avere attraversato un primo piano P_1 i raggi di luce escono per un secondo piano P_2 parallelo al primo, vengono così a riunirsi insieme il cannocchiale espresso da

$$XY = \xi\eta \ , \quad P_1X = \frac{1}{n} P_1\xi \ ,$$

ed il cannocchiale espresso da

$$\xi\eta = xy \ , \qquad P_2\xi = n . P_2x \ ;$$

perciò

$$XY = xy \ , \qquad Xx = \left(1 - \frac{1}{n}\right)P_1P_2 \ ;$$

cioè l'effetto di una lamina a basi parallele si è di spostare l' immagine di una lunghezza proporzionale alla grossezza P_1P_2 della lamina.

Ci resta finalmente da determinare la combinazione di un sistema generale rappresentato da

$$XY : \xi\eta = F_1X : F_1D_1 = f_1d_1 : f_1\xi$$

col caunocchiale

$$\xi\eta = i . xy \ , \quad P\xi = ij . P_2x .$$

Si trova con facili sostituzioni che il foco obbiettivo F del sistema complessivo coincide con quello del primo sistema, e che i rapporti delle distanze focali sono

$$FD : FD_1 = 1 : i \ , \quad fd : f_1d_1 = 1 : j \ ,$$

nel mentre che il nuovo foco oculare è dato da

$$Pf = Pf_1 : ij .$$

Padova li 31 dicembre 1852.

CURIOSITA' E INVESTIGAZIONI BAROMETRICHE

ARTICOLO

DEL SIG. PROF. GIUSEPPE BIANCHI

All'occasione di richiamarmi a ordinata disamina la serie completa delle osservazioni meteorologiche fatte quotidianamente in questa R. Specola nel corso dei ventun' anni dal 1830 al 1850 per trarne il possibil vantaggio e sussidio ad una miglior cognizione de'fenomeni atmosferici, ripensai fra me stesso che tuttora ben poco sappiamo di definito e accertato intorno la precisa espressione e quantità delle variazioni regolari e periodiche delle altezze barometriche in un luogo fisso e determinato di osservazioni. Che tali variazioni sussistano e siano grandi abbastanza per non isfuggire ai nostri mezzi e strumenti di misurarle, non è a moverne dubbio chi ponga mente alle naturali e note cagioni delle medesime. Sono queste principalmente la temperatura prodotta dai raggi solari, e l'azion attrattiva esercitata dalla luna e dal sole sopra l'atmosfera terrestre. Dalla prima, considerata per sè sola, deve prodursi la parte forse più notabile di una variazion regolare del barometro, sì diurna che annua, e l'annua più forte della diurna in ragione della maggiore differenza delle temperature estreme nel periodo rispettivo; ma con quella deve pur combinarsi la seconda cagione che per sè sola non può non influire e ingenerar nell' altezza barometrica un'altra parte di variazion regolare, anch'essa di doppio periodo, di un giorno rispetto alla rotazione terrestre, e di una rivoluzione sinodica della luna, ossia di periodo luni-solare. Tutta la difficoltà di raggiungere buoni risultamenti pratici di questo genere e discoprirne le leggi della natura consiste nel modo d'istituire e combinar in gran numero le osservazioni al duplice scopo che nei medj

delle medesime, e si trovin disgiunte le indicate specie di variazioni regolari, e sian fra loro verosimilmente, in gran parte almeno, compensate e distrutte quelle variazioni, che dipendon da irregolari cagioni e avvolgono d'inestricabil intreccio la regolarità delle prime. Avuto riguardo all' una e all'altra condizione riuscimmo così il Sig. Cav. Carlini, che ne tracciò il metodo, ed io che ne seguii 'e orme, a rappresentar quasi esattamente in conformità colle osservazioni le variazioni diurne del barometro, sì nell'estate, che nell' inverno, mediante una formula dipendente dai seni dell'angolo orario (Memorie della Soc. It. delle scienze, T. XX. Matematica, parte I, pag. 198 e seg.; Fisica, parte II, pag. 587, e seguenti). E quì vuolsi ben rimarcare che appunto la formula o espression generale della variazion barometrica diurna doveva riuscir libera dall'effetto dei cangiamenti annui di temperatura e dell'azion dinamica luni-solare; poichè le medie orarie osservate che impiegaronsi a ritrovarla essendo state raccolte presso ambo i solstizj, non potevan contenere fuorchè in minima parte i detti cangiamenti, ed abbracciando esse l'intervallo di un mese, venivan pure a separar ed escludere, come in questo compiuta, la parte dinamica mentovata. Senza una tale avvertenza e separazione dei semplici effetti periodici mi sembra che inutil sarebbe di tentarne la ricerca eziandio da un numero stragrande di accuratissime osservazioni. Quindi ancora l'indagine, che rimane a farsi, della variazion annua del barometro per cagion fisica e di temperatura, parmi che dovrà istituirsi e condursi adoperandovi le medie osservate di parecchi anni, e per una stessa ora del giorno, dei medj mensili del barometro; e la opportuna formola di rappresentazion generale ne sarà per avventura l'analoga di quella della variazione diurna, cangiato e raddoppiato l'angolo orario di questa nella corrispondente longitudine media del sole. Dopo di che la ricerca della variazion barometrica luni-solare potrà esser tentata

similmente, operando sopra le medie annue osservate del barometro per un corso di anni 18 circa sempre alla stessa ora, e nella formula empirica dei seni sostituendo all'angolo orario la rispettiva quantità della differenza di longitudine media della luna e del sole.

Io mi riservo all'opportunità di più lungo lavoro la trattazione di tal argomento, e pago di averne solo qui premesso un cenno di annunzio, mi rivolgo invece a considerar le mie determinazioni barometriche di 21 anni sotto altro punto speciale di veduta, che potrebbe per avventura tornar molto utile e suggerir eziandio un novello metodo d'indagar e stabilire le variazioni regolari del barometro prodotte dalle indicate cagioni. Consiste quest'altro aspetto nel raccogliere ed esaminar le differenze o relazioni fra le medie altezze barometriche osservate e le semisomme delle corrispondentemente e immediatamente osservate massime, e minime, desunte dai registri originali delle quotidiane annotazioni. Ed è pur manifesto che il trasportar così le ricerche dalle quantità assolute del barometro alle quantità relative o differenziali offre il vantaggio di evitar non poche nè lievi sorgenti d'incertezze e di errori. Perocchè quanto è arduo e delicato il riconoscere con precisione un'assoluta altezza barometrica, donde poi la difficoltà di esatte comparazioni di barometri differenti, altrettanto riesce agevole e sicuro assegnar le quantità relative, o per differenze, di uno stesso barometro, comparabili perciò ancora e precisamente alle analoghe e simultanee di altro barometro, non influendo in queste le correzioni rispettive di capillarità, di riduzion alla stessa temperatura, e di altre costanti che posson quindi trascurarsi, almeno sensibilmente.

Pertanto nella mia serie di 21 anni di osservazioni barometriche tratte fuori per ciascun mese le singole medie semplicemente dedotte o aritmetiche, e le massime e minime altezze immediatamente osservate, io formo le analoghe tre

specie di medie massime e minime annue, dividendo per 12 la somma delle mensili e rispettive di uno stesso anno. Chiamando così *massimo annuo* la media delle massime mensili e osservate, e *minimo annuo* similmente la media delle mensili minime, e detta *b* la semisomma di quello e di questo, prendo a considerare la differenza *a* — *b*, significato per *a* il *medio annuo* corrispondente e similmente formato delle medie aritmetiche mensili. Per tal modo mi risultarono i valori della tabella che sottopongo.

Anni	Mass. ann. del bar.	Min. ann. del bar.	Med. ann. del bar.	Diff. ann. $a-b$	Medie diff. $a-b$ triennali
	lin.	*lin.*	*lin.*	*lin.*	
1830	340, 1230	332, 2546	336, 8132	+ 0, 6244	
31	339, 7382	332, 9400	336, 5161	+ 0, 1770	*lin.*
32	340, 9352	333, 2593	337, 5275	+ 0, 4302	+ 0, 4105
33	340, 0157	331, 7695	336, 7243	+ 0, 8317	
34	341, 5271	333, 6482	338, 1295	+ 0, 5418	
35	341, 0094	332, 6572	337, 3052	+ 0, 4719	+ 0, 6151
36	340, 8064	331, 3013	336, 8953	+ 0, 8414	
37	340, 3398	331, 8594	336, 8088	+ 0, 7092	
38	340, 0948	331, 2179	336, 1896	+ 0, 5332	+ 0, 6946
39	340, 0286	332, 6853	336, 5496	+ 0, 1926	
40	340, 9800	332, 2842	336, 9232	+ 0, 2911	
41	340, 0590	331, 6279	336, 3869	+ 0, 5434	+ 0, 3424
42	340, 3923	332, 3234	336, 9730	+ 0, 6151	
43	340, 1001	330, 7266	336, 7134	+ 1, 3000	
44	339, 9220	331, 8318	336, 3346	+ 0, 4577	+ 0, 7909
45	340, 6042	330, 9801	336, 4552	+ 0, 6630	
46	340, 5903	331, 8368	336, 6352	+ 0, 4216	
47	340, 4575	331, 6989	336, 9729	+ 0, 8947	+ 0, 6598
48	340, 8698	331, 8038	336, 8223	+ 0, 4855	
49	340, 7215	331, 6875	336, 8859	+ 0, 6829	
1850	340, 4456	331, 9294	336, 7827	+ 0, 5952	+ 0, 5879

Il barometro, del meccanico Milanese Grindel, impiegato per tutta questa serie è stato sempre lo stesso, e tenuto ben verticale in un luogo fisso della maggiore sala dell'Osserva-

torio. Ha un galleggiante mobile che si riconduce ogni volta col livello inferiore allo zero della scala; e questa, che leggesi da una parte in pollici e linee del piede di Parigi e dall'altra in centimetri e millimetri, porge col movimento superiore di un microscopio e nonio per l'altezza della colonna i dodicesimi di linea e i decimi di millimetro. Fin qui e ai risultamenti della tabella ho creduto di non applicare la correzione di capillarità e la riduzione a temperatura comune dal termometro unito, non trattandosi ora per me di quantità assoluto e di confronti, bensì di semplici differenze o quantità relative, ove le correzioni comuni, o tali presso a poco, si elidon fra loro. E avverto pure che le nostre osservazioni meteorologiche originali essendo fatte ciascun giorno a tre o quattro ore date, e avendo io potuto convincermi che nelle massime, minime e medie mensili le differenze $a - b$ eguagliansi molto prossimamente dall'una all'altra ora di osservazione dello stesso mese, ho riputato perciò di prendere e offerir nella tabella soltanto le medie di ciascun'ora di osservazione; laonde queste possono riferirsi ad un' ora qualunque del giorno, se non ritenersi piuttosto come ottenute al punto del mezzodì, che è stata sempre ora intermedia fra quelle delle osservazioni. Riflettiam inoltre che nelle differenze annue e triennali $a - b$ riportate alla quinta e sesta colonna della tabella, e risultanti da interi numeri o periodi di giorno, di mese e di anno, debbon essersi in gran parte compensate ed eliminate fra loro le variazioni regolari del barometro prodotte dal sole per diurna e annua temperatura e dall' azion dinamica luni - solare diurna e mensile. Compiendosi i periodi delle quali variazioni, le influenze di queste nelle differenze $a - b$ delle corrispondenti quantità barometriche debbon riuscire come a differenziali di 2° ordine e perciò trascurabili rispetto alle residue cagioni di quantità di regolari cangiamenti.

Ora osserviamo due rimarchevoli particolarità che ci of-

frono le colonne 5^a e 6ª del recato prospetto e che sembran rivelare due fenomeni costanti della natura. È la prima che le differenze annue $a - b$ risultaron costantemente di segno positivo, trovandosi cioè sempre l'annuo medio barometrico maggiore della semi-somma di rispettivi massimo e minimo, e avvegnacchè le quantità di quest' eccesso abbian variato nella serie da 0, 2 a linee 1, 3 può ritenersene la media di circa mezza linea; quantità sensibile abbastanza per accusare una regolare cagione da cui derivi, e combinata colle accidentali e irregolari cagioni, che ne alteran pure notevolmente l'effetto di anno in anno. Ciò in grafica rappresentazione vuol dire che, alla mia stazione la linea congiungente i vertici dei medj annui del barometro, presi per ordinate, avvicinasi a quella dei vertici di massimo più che all' altra dei vertici di minimo; e in fisico linguaggio di clima. l'elevazion del barometro indicando la disposizione atmosferica al bel tempo, ciò vorrà dire che questo clima è più tendente in complesso al sereno ed asciutto che non al torbido e piovoso. Quale sarà dunque la detta cagion regolare, se, tolte le altre precedentemente avvertite, intrinseche od estrinseche al barometro ed eliminantisi nelle differenze $a - b$, se dico, non è questa la parte di azion dinamica luni - solare che non può compiersi e disparire colle altre analoghe parti di essa in un anno, stante l'eccesso del tempo della rivoluzion annua terrestre sopra dodici rivoluzioni sinodiche della luna? Di certo, e per principio statico, l'altezza del mercurio nel barometro dipende nel dato luogo da quella della colonna verticale atmosferica sovraincombente, in cui si consideri pure la legge delle densità e la forza elastica del calorico di temperatura. Ma l'azion attrattiva e combinata della luna e del sole sopra lo sferoide atmosferico per le mutate posizioni relative di tali astri non può non indurre continui e periodici cangiamenti nell' altezza dell'aerea colonna indicata, e quindi la parte di simili cangiamenti, non compiuta

o distrutta coll'intero periodo, deve manifestarsi nelle corrispondenti altezze barometriche, avvegnacchè vi sia pure intrecciata all'effetto contemporaneo delle grandi cagioni irregolari. Questa parte poi di variazion regolare nelle differenze *a* — *b* riuscirà generalmente diversa per tre anni consecutivi, ne'quali compiesi poco più della tredicesima rivoluzion sinodica di annuo supplemento della luna, e ripiglierà nel successivo triennio prossimamente gli stessi valori. Tal è di vero la seconda particolarità e il fatto che ci presentan le medie differenze triennali scritte nell'ultima colonna della tabella, offerendoci queste i più piccioli valori nei triennj primo quarto e settimo; cosicchè da un novennio raccogliesi ed apparisce un valore quasi costante di siffatta differenza. Sarebb'egli per tal modo che il famoso e dimenticato ciclo o *saros* lunare degli avvenimenti atmosferici realmente si adempisse e si palesasse nelle variazioni del barometro più approfondite e discusse? Io non oso affermarlo, e almeno le conclusioni de'miei risultamenti dovrebbero vedersi confermate dall'analogo esame di altre serie di osservazioni barometriche, istituite pure in altri luoghi, con mezzi e da osservatori differenti. Però la cosa mi sembra degna di attenzione e di studio, e meriterebbe altresì di applicarvi l'analisi teorica dei cangiamenti indotti a ciascun istante dall'azion attrattiva luni-solare nella posizione grandezza e costituzion interna di strati dello sferoide atmosferico per un dato luogo qualunque della superficie terrestre; applicazione cui ora io non mi sento nè l'attitudin d'ingegno, nè il fisico vigor necessario, nè la quiete e libertà delle cure proporzionata.

Rileviamo qualche altra piccola deduzione emergente dalla nostra serie barometrica. Prendiamo i massimi, i minimi e i medj valori per ciascuna colonna degli annui massimo minimo e medio della tabella, e avremo

	pel massimo annuo	*pel minimo annuo*	*pel medio annuo*
	lin.	lin.	lin.
mass.	=341,5271 nel 1834	...=333,6482 nel 1834	...=338,1295 nel 1834
min.	=339,7382...... 1831	...=330,7266..... 1843	...=336,1896...... 1838
med.	=340,4648...... 1847 pros.	...=332,0154..... 1850 pros.	...=336,8255...... 1848 pros.

L'anno 1834 in tutta la serie fu per me quello della minima pioggia, non essendone caduta che poco più di $^1|_3$ della media totale; ed è perciò singolare che in detto anno avvenisse non solo il massimo del medio annuo barometrico naturalmente consentaneo al minimo della pioggia, bensì ancora il massimo tanto de'massimi, che de'minimi annui barometrici, che significa il concorso di tutte le cagioni propizie alla stabilità del bel tempo.

Inoltre denotando pei totali minimi, medii e massimi precedenti con $a' - b'$, $a'' - b''$, $a''' - b'''$ rispettivamente le differenze formate similmente alle annue $a - b$, troviamo

$$a' - b' = -\overset{lin.}{0,1720}; \quad a'' - b'' = -\overset{lin.}{0,3341}; \quad a''' - b''' = -\overset{lin.}{0,1679};$$

quindi molto prossimamente ....$a' - b' = a''' - b''' = \frac{1}{2}(a'' - b'')$ e, cosa pur da notarsi, il segno comune di queste differenze contrario a quello delle differenze annue $a - b$.

Chiaro è da ultimo che mal si assumerebbe il medio barometrico di pochi anni di osservazioni, corretto eziandio da capillarità da temperatura e da qualunque imperfezione, a fondata e precisa determinazione della elevazione del luogo dal livello del mare; all'uopo bastando appena per avventura la nostra serie, nella quale i medj annui ottenuti oscillano tuttavia fra i larghi limiti di 2 linee.

Dall'aver discorso fin qui solamente delle regolari e periodiche variazioni del barometro passiamo ad intertenerci alcun poco sopra una serie o catena di vasti e recenti fenomeni atmosferici, ne'quali ha indubitatamente gran parte una straordinaria e irregolar variazione avvenuta nell'altezza del

barometro fisso. E ciò facciam tanto più di buon grado, quanto che, se la Meteorologia non può aspirare a vanto di vera scienza, al possedimento cioè di principj e di leggi dimostrate, fuorchè mediante lo studio de'continui regolari cangiamenti atmosferici, essa non deve al proprio scopo neppur trascurare quell'altra classe di fenomeni e cangiamenti che, sebbene discontinui a primo giudizio e disgiunti di luoghi e tempi, tuttavia per la grandezza loro influiscon assai nella concatenazione e nello svolgimento delle vicende atmosferiche e meritan una special attenzione per discoprirne le ignote origini e dipendenze.

È generale e pressochè di tutta Europa il lamento della stemperata e diuturna umidità dell'aria, che domina già da parecchi mesi e ancora non cessa. L'inverno ci trascorse con pioggie e nebbie frequenti e prolungate, ma di mitissima temperatura in guisa che fin verso la metà del Febbrajo le colline e pianure mancaron affatto di ghiacci e di nevi; mentre le valli, per eccessive acque piovane e di scolo, erano e tuttora sono a grande altezza allagate. Poco innanzi però la metà del Febbrajo mutossi repentinamente la disposizion di temperatura degli alti strati atmosferici, cadde in abbondanza e protratta la neve anche al piano (però senza forti geli per l'avanzata stagione); ma soprattutto di enorme quantità ne furon ovunque ricoperte le giogaje de'monti, non ricordandosi quivi dai vecchi una esorbitanza eguale, non che maggiore, di simile intemperie, ed essendo state purtroppo molte e lagrimevoli le derivate sventure di frane, di vallanghe, di furiosi straripati torrenti e di alluvioni. Or ecco in qual modo il barometro ha indicato e poteva somministrar anzi un pronostico della tardiva intemperie nevosa e delle sue conseguenze. Nel giorno 10 di Febbrajo il mio barometro abbassò straordinariamente, segnando la mattina un'altezza di linee 325, 6250, e contemporaneamente sollevossi e infuriò, da noi una bufera di vento con pioggia e neve, il

cui mormorio in distanza rassembrava quello di una fiumana che travolge sassi e ghiaje. Da questo fenomeno e dall'abbassamento barometrico avvertito incominciava l'improvviso regresso delle meteore invernali, come ciò avvenne altre volte nel corso della nostra serie. Io notava difatti nel dì 4 Gennajo del 1841 il forte abbassarsi del barometro a linee 327, 7500, e ne seguiva a tutto Febbrajo copia di neve e di pioggia con rare interruzioni di serenità. E più distintamente ancora, dopo un abbassamento del barometro a linee 327, 6250 il 21 Gennajo del 1845, dispiegavasi un'ostinata inclemenza atmosferica, di nevi e pioggie nel Febbrajo e Marzo, prolungatasi con nembi e grandini al Giugno, e ch'io feci soggetto di speciali considerazioni (Memorie della Soc. It. delle scienze, T. XXIII parte matematica, pag. 330 e seg.). Però é duopo avvertire che, se l'abbassamento straordinario del barometro succeda più tardi e in sul terminar dell'inverno, esso proviene allora dai gagliardi venti che aprono la primavera e riconducono anzi il bel tempo cacciando le nubi e dissipando i vapori atmosferici. Così nel 1838 il forte abbassamento del mio barometro a lin. 324, 1667 accaduto nel dì 26 Febbrajo, e l'altro anche maggiore a lin. 323, 7500 accaduto il 28 Febbrajo del 1843 non ebbero qui conseguenze di umide e lunghe intemperie. Quest' anno invece di precoce abbassamento del barometro i venti di Marzo, almeno a piccola elevazione dal suolo, non hanno da noi spirato, mantenendosi un alternarsi continuo, da me segnalato altrove qual cagione di pioggia, del vento di N-E che ci sospinge gli ammassi de'vapori adriatici e delle valli con quello di N-O che li raffredda.

Ma ciò che maggiormente caratterizza e contraddistingue i recenti fenomeni meteorologici in riguardo alle indicazioni del barometro sono per avventura le medie barometriche mensili. Prese pertanto le medie quantità dalle differenti ore delle quotidiane osservazioni, come praticai per la tabella

superiore, io ne trovo per le medie barometriche del Febbrajo i seguenti valori.

Anno	Med. bar. di Febbr.	Anno	Med. bar. di Febbr.	Anno	Med. bar. di Febbr.
	lin.		lin.		lin.
1830	336, 0427	1838	333, 6951	1846	337, 5677
1	335, 9410	9	337, 9118	7	335, 5540
2	338, 2147	40	337, 0477	8	336, 1144
3	336, 1702	1	335, 4504	9	337, 4881
4	340, 2871	2	339, 0800	1850	336, 4397
5	336, 9318	3	333, 7685	1	337, 2500
6	335, 0313	4	333, 3657	2	335, 8524
1837	338, 8013	1845	334, 1633	1853	331, 5721

Quì é manifesto il medio barometrico del Febbrajo essere stato nel corrente anno considerabilmente il minimo tra quelli dei 24 anni consecutivi dal 1830; e vuol dire che per tutto il detto mese di quest'anno il barometro si è mantenuto sempre basso. In appresso, e sino ai presenti primi di Giugno, esso a quando a quando si è rialzato, ma ogni volta per breve tempo e di non grande quantità, il che mostra chiaro il perturbamento continuato e la forte variazione diuturna alla pressjon atmosferica. Osservando infatti, ed é questo il terzo carattere o indizio barometrico di cotal aereo sconvolgimento, le medie altezze di Marzo Aprile e Maggio ultimi, queste per me sono tutte al disotto dei 28 pollici; ed è notevole che avvenne altrettanto dopo il memorabile inverno del 1845. Dunque, a conchiudere, la recente serie di atmosferiche perturbazioni è un grande fenomeno, esteso ad ampio tratto di superficie terrestre, e che il barometro ha intimamente palesato, nel suo principio coll'abbassamento straordinario del giorno 10 Febbbrajo, nel suo sviluppo col medio mensile minimo dello stesso Febbrajo (medio che nella tabella prece-

dente sorpassa tante volte l'altezza di 28 pollici e tante volte volte non la raggiunge nel rapporto circa di 3 : 2), e nel suo andamento sin presso al termine coi piccoli medj mensili susseguenti. Per cosifatti motivi e riguardi non sarebbe forse improprio denominare le vicende atmosferiche attuali una *grande malattia barometrica* dell'aria; ma chi saprebbe poi addurne la vera e precisa *diagnosi*? Frattanto non sarà inutile rimarcare che al vasto fenomeno meteorologico questa volta pure non é mancata una specie di polo contrario, poichè, mentre in massima parte il continente europeo è stato avvolto lungamente da nembi di neve di pioggia e di grandine, leggevasi poc'anzi ne'pubblici fogli che a Malta dura da più mesi un'ostinata siccità

Sopra la causa fisica della strana meteora procellosa al suo dispiegarsi con un forte abbassamento del barometro il 10 di Febbrajo non mi sembran da azzardare ipotesi e congetture senza l'appoggio di buone ragioni, di fatti osservati, e di verosimili influenze. Parmi tuttavia che non vi debba essere stata estranea l'elettricità atmosferica, della quale si ebbero insolitamente quì nell'ultimo inverno e prima del Febbrajo frequenti segni di lampi, tuoni e perfino di un fulmine caduto la mattina del 17 Gennajo. E questo agente atmosferico di elettricità quanto è poderoso a produrre amplissimi effetti fisici e chimici, altrettanto riesce per noi misterioso ed irregolare, perchè finora mal conosciuto nella sua distribuzione e ne'suoi disequilibrj. Però qualunque sia stata la recondita cagione che addusse in origine col barometrico abbassamento le procellose meteroe susseguite, il progressivo apparire di queste spiegasi molto naturalmente dall'azione e contrasto di note cagioni quali sono l'evaporazione, la temperatura e somiglianti. Ad esempio nella mia particolare località questa spaziosa pianura Modenese confinando alla plaga di N. E. con estesissimo paese di valle a lungo e totalmente inondato dalle pioggie antecedenti, ed essendo situata

fra l'alta corona degli Apennini a mezzodì e la non meno elevata di Monti Veronesi a Settentrione, non è maraviglia che, sopracarichi l'una e l'altra corona montuosa di una quantità enorme di neve e al sopraggiungere i tepidi giorni di Aprile e i caldi di Maggio si formassero e infierisser di sovente, com'è di fatto accaduto, nembi tempestosi ed elettrici dai copiosi vapori adriatici e vallivi, sollevati e trabalzati dai venti a regioni ed altezze di temperature differentissime. Ripeto nondimeno che tali meteore sono state un fenomeno molto grande, si parzialmente o per luoghi vicini che generalmente o per luoghi assai distanti fra loro. In realtà, dopo le nevi anche al piano, le pioggie sono cadute, o incessanti, o strabocchevoli e dirotte, succedettero le gragnuole fitte grosse e furiose a disertar di prodotti e speranza moltissimi paesi, e omai ci è trascorsa interamente la bella stagione pressocche del continuo torbida e trista nell'atmosfera. Io non mi sovvengo del più lieto e solenne giorno cattolico, qual è quello di Pasqua, cotanto fosco e rattristato da inclemenza di meteore, quanto lo è stato il 27 Marzo di quest'anno per lo imperversare del tempo a scrosci di pioggia e di neve turbinate.

Dipoi nel secondo giorno festivo della Pentecoste infuriava qui un temporale di grandine che, sebben mista a pioggia ricopriva la terra e aggelava l'aria. E alla susseguente festività del Corpus Domini poco mancò che una simile intemperie di pioggia non impedisse la solenne processione all'aperto delle vie, come ciò è avvenuto a Milano e Torino. Tanta é la minaccia di pubblica grave calamità che a ragione se ne teme una generale scarsezza di ricolti e perciò un'anno di miseria e di fame. A questo punto la povera e breve scienza del Fisico non ha che a chinare la fronte e supplicare col popolo alla Potenza che, o flagella e punisce, o solo salutarmente spaventa, valendosi non più che delle stesse naturali cagioni e leggi da essa Lei create e stabilite. E forse che

non s'addice quest'umile ossequio del Filosofo alla luce della Cattolica Verità, mentre fra le tenebre dell'errore perfin la pagana sapienza ci tramandava scritto: *Coelo tonantem credidimus Jovem regnare*?

Modena, 5 Giugno 1853.

AGGIUNTA AL PRECEDENTE ARTICOLO DI CONSIDERAZIONI BAROMETRICHE

Giacchè le riflessioni che poc'anzi presentai sopra la serie delle mie quotidiane osservazioni del barometro dall'anno 1830 al 1850 potrebbero eccitar in taluno la curiosità di conoscere la serie simultanea e corrispondente delle temperature atmosferiche da me osservate, così avendo io pure ordinata e ristretta quest ultima serie al modo medesimo che praticai in riguardo al barometro, penso che non sia inutil cosa il qui produrla, ed eccola, immediatamente:

TERMOMETRO ESTERNO E OTTANTIGRADO

Ann.	Massimo annuo	Minimo annuo	Medio annuo	diff. annue s — t	differenze triennali
1830	+15°, 0833	+ 6°, 8417	+11°, 0109	+ 0°, 0484	
1	+14, 6389	+ 7, 1389	+11, 1265	+ 0, 2376	
2	+14, 1139	+ 6, 3031	+10, 6147	+ 0, 4062	+ 0°, 2307
3	+13, 0814	+ 6, 9831	+10, 2484	+ 0, 2161	
4	+14, 9646	+ 7, 3229	+11, 2989	+ 0, 1551	
5	+14, 4875	+ 5, 6396	+10, 5146	+ 0, 4510	+ 0, 2741
6	+14, 4000	+ 5, 7479	+10, 5580	+ 0, 4840	
7	+13, 8833	+ 6, 6802	+10, 4061	+ 0, 1243	
8	+14, 6833	+ 6, 1302	+10, 5715	+ 0, 1647	+ 0, 2577
9	+15, 4521	+ 6, 8271	+11, 5038	+ 0, 3642	
40	+14, 3538	+ 6, 7833	+10, 8677	+ 0, 2991	
1	+15, 4267	+ 8, 0588	+11, 7673	+ 0, 0195	+ 0, 2276
2	+14, 0650	+ 6, 7083	+10, 6617	+ 0, 2750	
3	+14, 3104	+ 7, 0688	+10, 8566	+ 0, 1670	
4	+14, 2718	+ 7, 3902	+11, 1453	+ 0, 3143	+ 0, 2521
5	+14, 3229	+ 7, 3396	+10, 8876	+ 0, 0563	
6	+15, 3313	+ 8, 5933	+11, 9870	+ 0, 0247	
7	+14, 1878	+ 7, 2925	+10, 1278	+ 0, 3876	+ 0, 1562
8	+14, 2000	+ 7, 6550	+11, 0094	+ 0, 0819	
9	+15, 1567	+ 7, 7400	+11, 4968	+ 0, 0484	
1850	+14, 1167	+ 6, 3367	+10, 4694	+ 0, 2427	+ 0, 1243

Qui ancora il termometro usato é stato sempre il medesimo e tenuto nello stesso luogo all'aperto verso il Nord e val a dir all'ombra. Si guardi poi che i riportati massimi e minimi annui sono come feci pel barometro, le medie delle rispettive massime e minime temperature osservate a ciascun mese dell'anno e dedotte dalle diverse ore di annotamento. Rappresentato con s il medio annuo totale e con t la semisomma dei corrispondenti massimo e minimo annui, formansi così le differenze poste nella colonna penultima, che risultan varie di anno in anno entro circa mezzo grado Reaumuriano. Ma è singolare che le medie di queste differenze nei successivi triennj hanno assai prossimamente un valor costante di circa o°, 22 e che le singole offron sempre il segno positivo, come trovai accadere anche nelle simili differenze barometriche.

Presi ora i massimi i minimi e i medj termometrici della tabella, vediamo essere stato

	de'massimi annui		*de'minimi annui*		*de'medj annui*	
il mass.	+15,°4521	nel 1839	+8,°5933	nel 1846	+11,°9870	nel 1846 .....
il min.	+13, 0814	1833	+5, 6396	1835	+10, 2484	1833 .....
il medio	+14, 5015	1835 pross.	+6, 9853	1833 pross.	+10, 9586	1848 pros.

quindi

$s''' - t''' = +0,2347$ $s' - t' = -0,1312$ $s'' - t'' = -0,1591$

E, come pel barometro, ne viene approssimativamente la curiosa e semplice relazione

$$(s''' - t''') + (s' - t') = -(s'' - t'')$$

Io per ora non mi avanzerò ad altre considerazioni. Soltanto ricorderò che nella mia tavola dell'annua pioggia per l'intervallo stesso dei 21 anni il 1833 risultava essere stato il secondo fra gli anni maggiormente piovosi e di poco inferiore al 1839 che vi appariva il primo. Ora dunque si de-

duce che all'anno della pressocchè massima pioggia corrispose per me la media delle minime annue temperature e la minima delle medie annue. Vi corrispose pure la minima delle massime. Ma rispetto a quest'ultima il risultato comparativo é in opposizione con quello dell'anno 1839 in cui s'unirono ambi i massimi della pioggia e dell'annuo massimo della temperatura. Di tal guisa il termometro per me un anno si piovoso qual fu il 1833; come il barometro mi contraddistinse l'anno più asciutto qual fu il 1834, cioé l'immediatamente consecutivo.

Modena, 25 Giugno 1853.

SOLUZIONE ALGEBRICA DELLA
$x^2+y^2=(a^2+b^2)^k$,
ESSENDO k UN VALORE NUMERICO INTERO.

NOTA (*)

DEL PROF. PAOLO VOLPICELLI

§. I.

È facile verificare mediante la sostituzione, che la proposta

(1) $$x^2+y^2=(a^2+b^2)^k,$$

è soddisfatta dalle seguenti generalissime formule

(2) $$\begin{cases} x=\pm\left[a^k-\dfrac{k(k-1)}{1.2}a^{k-2}b^2+\dfrac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1.2.3.4}a^{k-4}b^4\right. \\ \qquad -\dfrac{k(k-1)....(k-5)}{1.2...6}a^{k-6}b^6+....\pm b^k\ (\text{ovvero})\ \pm kab^{k-1}, \\ y=\pm\left[ka^{k-1}b-\dfrac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}a^{k-3}b^3\right. \\ \qquad +\dfrac{k(k-1)...(k-4)}{1.2...5}a^{k-5}b^5-\dfrac{k(k-1)...(k-6)}{1.2....7}a^{k-7}b^7 \\ \qquad +...\pm kab^{k-1}\ (\text{ovvero})\ \pm b^k. \end{cases}$$

Ognuno rileverà di leggieri la elegante dipendenza, che passa fra queste nuove formule solutive, e lo sviluppo della potenza

(*) Questa nota, già presentata nella sua maggior parte all' accademia delle scienze dell' Istituto di Francia (*Comptes Rendus*. Tom. XXXVI, p. 443), è l' estratto di una memoria, posteriormente sullo stesso argomento, dall'autore inserita nel Tom. V.° degli atti dell' accademia pontificia de'nuovi Lincei, p. 318; e contiene qualche utile addizione non ancora pubblicata.

binomiale $(a+b)^k$. Sarà pure facile all'occasione, cioè secondo che k sia pari od impari, scegliere quello dei due ultimi termini, che dovrà competere a ciascuna delle (2), come ancora quello dei due segni, da cui dovrà essere il termine stesso preceduto.

Il termine generale per la prima delle (2) sarà

(3)
$$T = \pm \frac{k(k-1)\ldots[k-(2n-3)]}{1.\ 2.\ 3.\ldots.\ 2(n-1)}\, a^{k-2(n-1)}\, b^{2(n-1)},$$

non compreso il primo di essa; e per la seconda delle medesime sarà

$$T = \pm \frac{k(k-1)\ldots[k-2(n-1)]}{1.2.3\ldots.\ (2n-1)}\, a^{k-(2n-1)}\, b^{2n-1},$$

nelle quali due formule rappresenta n la sede del termine che si vuole.

Simboleggiando con

$$C_{\alpha,\,\beta}$$

il numero delle combinazioni di α cose in β luoghi, e semplicemente con C_α il numero delle combinazioni quando $\beta=\alpha$, potranno le (2) venir espresse anche a questo modo

$$x = \pm [\, C_k\, a^k - C_{k,2}\, a^{k-2}\, b^2 + C_{k,4}\, a^{k-4}\, b^4 - \ldots.$$

$$\pm C_k\, b^k \quad \text{(ovvero)} \quad \pm C_{k,1}\, ab^{k-1}\ ;$$

$$y = \pm [\, C_{k,1}\, a^{k-1}\, b - C_{k,3}\, a^{k-3}\, b^3 + C_{k,5}\, a^{k-5}\, b^5 - \ldots.$$

$$\pm C_{k,1}\, ab^{k-1} \quad \text{(ovvero)} \quad \pm C_k\, b^k\,.$$

Similmente simboleggiando con

$$P_{\alpha,\beta}$$

il numero delle permutazioni dl α cose in β luoghi, e semplicemente con P_α il numero delle permutazioni, quando $\beta=\alpha$, le formule (3) si esprimeranno rispettivamente pure colle

$$T = \pm \frac{P_{k,\,2(n-1)}}{P_{2(n-1)}}\, a^{k-2(n-1)}\, b^{2(n-1)},$$

$$T = \pm \frac{P_{k,\,2n-1}}{P_{2n-1}}\, a^{k-(2n-1)}\, b^{2n-1};$$

od anche colle

$$T = \pm C_{k,\,2(n-1)}\, a^{k-2(n-1)}\, b^{2(n-1)},$$

$$T = \pm C_{k,\,2n-1}\, a^{k-(2n-1)}\, b^{2n-1}.$$

§. II.

Dopo ciò consideriamo primieramente il caso di k pari; e facendo per brevità

$$a^2 + b^2 = z,$$

abbiansi le

(4) $x^2+y^2=z^2$, $x^2+y^2=z^4$, $x^2+y^2=z^6$,...., $x^2+y^2=z^k$,

che sono di numero $\frac{k}{2}$. Inoltre sieno

$$(x_1\,,\ y_1);\quad (x_2\,,\ y_2);\ (x_3\,,\ y_3);\ \ldots\ldots$$

$$(x_{\frac{k}{2}-1}\,,\ y_{\frac{k}{2}-1});\ \ (x_{\frac{k}{2}}\,,\ y_{\frac{k}{2}})$$

le soluzioni che appartengono rispettivamente alle (4), e che ottengonsi dalle (2), facendo successivamente in esse

$$k = 2,\ 4,\ 6,\ldots\ldots$$

La proposta (1) sarà soddisfatta dalle soluzioni seguenti

$$(5)\ \begin{cases} (z^{\frac{k}{2}-1} x_1\,,\ z^{\frac{k}{2}-1} y_1);\ \ (z^{\frac{k}{2}-2} x_2\,,\ z^{\frac{k}{2}-2} y_2)\,; \\ (z^{\frac{k}{2}-3} x_3\,,\ z^{\frac{k}{2}-3} y_3);\ \ldots\ ;\ (z x_{\frac{k}{2}-1}\,,\ z y_{\frac{k}{2}-1})\,;\ (x_{\frac{k}{2}}\,,\ y_{\frac{k}{2}}), \end{cases}$$

che saranno tutte quelle che le apppartengano; perchè sono tutte diverse fra loro, e di numero $\frac{k}{2}$; quante cioè ne assegnano in tal caso le relative formule di Gauss, già da me dimostrate (*).

La soluzione che rappresenta una qualunque delle (5) sarà

$$(z^{\frac{k}{2}-n} x_n ,\ z^{\frac{k}{2}-n} y_n) ,$$

nella qnale potrà n ricevere gl'interi tutti da 1 sino a $\frac{k}{2}$.

Le molte proprietà che appartengono alle stesse (5), si trovano già sviluppate nella memoria sullo stesso argomento, citata in principio di questa nota. Qui osserveremo solamente:

1°. che le (5) si distinguono in $\frac{k}{2}$ *specie*, le quali l'una dall'altra diversificano pei fattori z, comuni ai due numeri componenti le soluzioni stesse; proprietà già osservata da me in altre simili soluzioni (**).

2.° che quante volte $a^2 + b^2$ sia un primo, l'ultima delle (5) si compone di due numeri primi fra loro.

3.° che la soluzione

$$x = a^2 - b^2 , \qquad y = 2ab , \qquad z = a^2 + b^2 ,$$

data per la $x^2 + y^2 = z^2$ dal De Frenicle, sul finire del decimo settimo secolo, nel t°. V della prima raccolta dell'accademia reale delle scienze di Parigi, pubblicato nel 1729 (***),

---

(*) Comptes Rendus T, XXXIII, p. 324. — Atti dell' Accademia pontificia de'Nuovi Lincei T. IV, novembre 1850, pag. 22. — Annali di Scienze Mat. e fisiche T. I, dicembre 1850, pag. 527.

(**) Annali di Scienze fisiche e mat. 1850, p. 371: — Idem 1852 , p. 130. — Atti dell'Accademia pontificia de'nuovi lincei T. IV. p. 508.

(***) Comptes Rendus T. XXVIII, p. 755.

è un caso particolare delle mie precedenti formule (2), dalle quali, facendo in esse $k=2$, si ottiene la soluzione medesima.

§. III.

Venendo al caso di k impari, si abbiano le

(6) $x^2+y^2=z$, $x^2+y^2=z^3$, $x^2+y^2=z^5$,... $x^2+y^2=z^k$,

che sono $\frac{k+1}{2}$ di numero. Inoltre sieno

$$(x_1 , y_1) ; (x_2 , x_2) ; (x_3 , y_3) ; \ldots ; (x_{\frac{k+1}{2}} , y_{\frac{k+1}{2}}) ,$$

le soluzioni che appartengono rispettivamente alle (6), e che si deducono tutte dalle (2), facendo successivamente in esse

$$k=1 , 3, 5, 7, \ldots .$$

La proposta (1) sarà, per questo caso, verificata dalle soluzioni seguenti

$$(7)\left\{\begin{array}{l}(z^{\frac{k-1}{2}}x_1 , z^{\frac{k-1}{2}}y_1) ; (z^{\frac{k-3}{2}}x_2 , z^{\frac{k-3}{2}}y_2) ; (z^{\frac{k-5}{2}}x_3 , z^{\frac{k-5}{2}}y_3) ; \\ \ldots\ldots ; (zx_{\frac{k-1}{2}} , zy_{\frac{k-1}{2}}) ; (x_{\frac{k+1}{2}} , y_{\frac{k+1}{2}}) ,\end{array}\right.$$

che saranno tutte quelle che appartengono alla medesima, perchè oltre ad essere tutte fra loro diverse, sono di numero $\frac{k+1}{2}$, cioè quante ne assegnano per questo caso le corrispondenti formule di Gauss, precedentemente citate.

L'espressione di una qualunque delle (7) sarà

$$\left(z^{\frac{k-(2n-1)}{2}}x_n , z^{\frac{k-(2n-1)}{2}}y_n\right) ,$$

nella quale potrà la n ricevere i valori tutti dall' 1 sino al $\frac{k+1}{2}$.

Le molte proprietà che appartengono alle medesime (7), furono esse pure dimostrate nella memoria sullo stesso argomento, citata in principio. Qui ci limiteremo a rilevare che:

1.° le soluzioni della proposta (1), pure in questo secondo caso, vengano distinte in tante *specie*, quante sono le unità $\frac{k+1}{2}$: specie che diversificano fra loro pei fattori z, comuni ai due numeri, che compongono le soluzioni medesime:

2.° le soluzioni (7), dall'ultima in fuori, tutte si compongono di due numeri evidentemente non primi fra loro; mentre l'ultima di esse, quante volte a^2+b^2 sia un primo, risulta di due numeri primi fra loro:

3.° supponendo nella (1) $a=b$, avremo a risolvere la

$$x^2+y^2=(2a^2)^k\,, \tag{8}$$

la quale solo può verificarsi per k impari.

Per tanto le (2), nel caso attuale, si ridurranno alle

$$x=\left[1-\frac{k(h-1)}{2}+\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{1.\,2.\,3.\,4}\right.$$

$$\left.-\frac{k(k-1)\ldots(k-5)}{1.\,2.\,\ldots\,6}+\ldots\pm k\right]a^k,$$

$$y=\left[k-\frac{k(k-1)(h-2)}{1.\,2.\,3}+\frac{k(k-1)\ldots(k-4)}{1.\,3.\,5}\right.$$

$$\left.-\frac{k(k-1)\ldots(k-6)}{1.2\ldots7}+\ldots\pm1\right]a^k;$$

e poichè, nel caso di k impari, abbiamo

$$1-\frac{k(k-1)}{1.\,2}+\frac{k(k-1)\ldots(k-3)}{1.\,2.\,3.\,4}-\ldots\pm k=(-1)^\beta\,2^{\frac{k-1}{2}},$$

$$k-\frac{k(k-1)(k-2)}{1.\,2.\,3}+\frac{k(k-1)\ldots(k-4)}{1.\,2\ldots5}-\ldots\pm1=(-1)^\gamma\,2^{\frac{k-1}{2}};$$

essendo gli esponenti β, γ due interi. perciò, avendo solo riguardo al valore numerico, avremo

$$(9) \qquad x = 2^{\frac{k-1}{2}} a^k\,, \quad y = 2^{\frac{k-1}{2}} a^k\,.$$

Se pertanto si pongano le

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} x^2 + x^2 = 2a^2\,, \quad x^2 + y^2 = (2a^2)^3, \\ x^2 + y^2 = (2a^2)^5, \ldots, x^2 + y^2 = (2a^2)^k, \end{array} \right.$$

facendo nelle (9) successivamente $h = 1, 3, 5, 7, \ldots$, si avranno per le (10) le seguenti rispettive soluzioni

$$(2^0 a, 2^0 a); \quad (2^1 a^3, 2^1 a^3); \quad (2^2 a^5, 2^2 a^5)\,; \quad \ldots\,; \ (2^{\frac{k-1}{2}} a^k, 2^{\frac{k-1}{2}} a^k).$$

Quindi per le dottrine precedenti è chiaro, che le soluzioni tutte della proposta (8) saranno

$$(2a^2)^{\frac{k-1}{2}} (2^0 a, 2^0 a); \quad (2a^2)^{\frac{k-3}{2}} (2^1 a^3\,, 2^1 a^3)\,;$$

$$(2a^2)^{\frac{k-5}{2}} (2^2 a^5, 2^2 a^5); \quad (2a^2)^{\frac{k-7}{2}} (2^3 a^7\,, 2^3 a^7)\,;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(2a^2)(2^{\frac{k-3}{2}} a^{k-2}\,, 2^{\frac{k-3}{2}} a^{k-2}); \quad (2^{\frac{k-1}{2}} a^k\,, 2^{\frac{k-1}{2}} a^k)\,,$$

che tutte sono eguali fra loro, ed ognuna perciò riducesi all'ultima delle medesime. Dunque la (8) ammette una sola soluzione, e questa composta di numeri non primi fra loro; cioè la potenza di grado impari del doppio di un quadrato, potrà una sol volta spezzarsi nella somma di due quadrati.

Abbiamo pertanto risoluta la proposta nel modo il più generale non solo, ma eziandio il più elementare, senza valerci del calcolo delle forme immaginarie; le quali però possono in questo genere di ricerche con utilità impiegarsi,

come già egregiamente fece il chiarissimo sig. prof. Bellavitis (*).

§. IV.

Molte conseguenze pure deduconsi dal considerare le soluzioni della (1) senza distinguere il caso di k pari da quello di k impari; e furono esse già dedotte nella più volte citata memoria, cui rimandiamo i lettori. Termineremo questa nota limitandoci ad esporre, con qualche utile addizione, ciò che si trova sul fine della memoria stessa.

1.° Affinchè la proposta

$$x^2 + y^2 = c\,,$$

possa risolversi, dovrà l'intero c potersi ridurre nella somma di due quadrati, ciò vuol dire che dovrà verificarsi la seguente condizione

$$(11) \qquad c = 2^\mu\, S^2\, h^\alpha{}_1\, h^\beta{}_2\, h^\gamma{}_3 \ldots h^\tau{}_k\,,$$

nella quale i fattori

$$h_1\,,\; h_2\,,\; h_3\,, \; \ldots\ldots\,,\; h_k\,,$$

rappresentano primi diversi fra loro, ed ognuno della forma $4m + 1$, ovvero $4n - 3$; il fattore S indica un prodotto di primi, ciascuno della forma $4m + 3$, ossia $4n - 1$; da ultimo gli esponenti

$$\mu\,,\;\; \alpha\,,\;\; \beta\,,\;\; \ldots\ldots\,,\, \tau\,,$$

esprimono interi, dei quali sarà $\mu = 0$, quando sia c impari. Sappiamo dalla teorica dei numeri (Gauss), che verificata la (11), lo spezzamento del numero c, in somme ognuna di due quadrati, avviene sempre.

2.° Essendo μ pari, od anche nullo, ed inoltre

(*) Annali di Scienze matematiche, e fis. T. I, an. 1850, p. 422.

$$\alpha = \beta = \gamma = \ldots . = \tau = 0 ,$$

la proposta non avrà soluzioni di sorta, perchè il fattore S^2 non può mai ridursi nella somma di due quadrati.

3.° Se il numero c sia tale, che gli spezzamenti suoi, nella somma ciascuno di due quadrati, sieno tutti composti di numeri non primi fra loro, avrà luogo la condizione (11) in guisa, che l'uno, o l'altro, od ambedue i fattori 2^μ, S^2 dovranno trovarsi nella stessa (11).

4.° Se il numero c sia tale, che gli spezzamenti suoi nelle somme di due quadrati ognuna, si compongano parte di due numeri primi fra loro, e parte di due numeri non primi fra loro, è chiaro, per la teorica dei numeri, che dovrà essere

$$S = 1 , \quad \text{ed almeno} \quad \gamma > 1 ;$$

cioè la condizione (11) si ridurrà nella

$$(12) \qquad c = h^\alpha{}_1\, h^\beta{}_2 \ldots h^\tau{}_k ,$$

in cui per lo meno uno degli esponenti, che sono di numero k, dovrà essere > 1, mentre dei residuali $k - 1$ al più $k - 2$ potranno essere ciascuno $= 0$. Perciò in questo caso la più semplice composizione del numero c sarà

$$c = h^2{}_1\, h_2 .$$

Così, per esempio, le soluzioni della

$$x^2 + y^2 = 5^2 . 13,$$

sono

$$x = (15, 17, 1 ; \quad y = (10, 6, 18,$$

di cui la soluzione

$$(15 , \quad 10)$$

si compone di numeri non primi fra loro; e le altre due

$$(17 , 6) ; \qquad (1 , 18)$$

si compongono ciascuna di due numeri primi fra loro.

Per tanto avremo verificata la

$$x^2 + y^2 = h^{\alpha}{}_1\, h^{\beta}{}_2\, h^{\gamma}{}_3 \; . \; . \; . \; h^{\tau}{}_k \; ;$$

cioè la somma $x^2 + y^2$ non sarà divisibile affatto in tal caso per un primo della forma $4m + 3$, ovvero $4n - 1$. Dunque se due numeri x, y non abbiano per fattore comune un primo della forma ora indicata, neppure la somma $x^2 + y^2$ dei loro quadrati avrà quel fattore.

Questo teorema fu già dimostrato dal celebre Eulero, per mezzo dell'altro di Fermat sulle potenze prime dei numeri interi (*); ma noi lo abbiamo dedotto a guisa di corollario dalla condizione (12), che si riferisce alla possibilità di spezzare un intero c in somme ognuna di due quadrati, questi essendo in alcune primi fra loro, e non in altre.

5.° Potremo ancora concludere dalla (12), che se due numeri x, y non abbiano per fattore comune una potenza pari di 2, neppure la somma dei loro quadrati avrà per fattore una simile potenza.

6.° I divisori tutti di c nella (12) consistono evidentemente nelle combinazioni e dei fattori h_1, h_2, ..., h_k, e delle diverse potenze loro; ma ognuna di queste combinazioni, per la teorica dei numeri si riduce in una somma di due quadrati: dunque ogni divisore della somma

$$x^2 + y^2 = c \, ,$$

nel caso in cui la condizione (12) si verifichi, è un'altra somma di due quadrati, quand'anche x, ed y sieno primi fra loro. Dunque sebbene due numeri x, y sieno primi fra loro, ciascun divisore della somma $x^2 + y^2$ sarà pur esso una somma di due quadrati. Questo teorema fu dimostrato in

---

(*) Nouvelles Annales de math. par M. Terquem e M. Gerono T. 12. Paris 1853. p. 46.

varie guisa: una dimostrazione del medesimo fu data dal Sig. Serret (*), ed un' altra dal Sig. Hermite (**); noi però abbiamo dedotto il teorema stesso dalla medesima condizione (12) dalla quale deducemmo il precedente.

7.° Dice Legendre nella sua Teorica dei numeri, T. I. p. 203 terza edizione (1830) « Tout diviseur de la formu- » le $t^2 + u^2$ composée de deux carrés primiers entre eux, » est également la somme de deux carrés premiers entre » eux ». Osserviamo a questo proposito, che i due numeri 119 e 120 sono primi fra loro, poichè abbiamo

$$119 = 7.17\ ,\quad 120 = 2^3.\ 3.\ 5\ ;$$

dunque saranno tali anche i quadrati dei numeri stessi, ed avremo

$$119^2 + 120^2 = 28561.$$

Inoltre i numeri 39, e 26 non sono primi fra loro, perchè hanno il 13 per fattore comune, quindi neppure i loro quadrati saranno primi fra loro, laonde sarà

$$39^2 + 26^2 = 2197.$$

Ora poichè

$$\frac{119^2 + 120^2}{39^2 + 26^2} = 13\ ,$$

perciò concluderemo che la somma di due quadrati primi fra loro, come la

$$119^2 + 120^2\ ,$$

può anche ammettere fra suoi divisori la somma di due quadrati non primi fra loro, come la

$$39^2 + 26^2$$

contro l'enunciato sopra espresso.

(*) Journal de mathématiques pures et appliqueés T. XIII.

(**) Serret. Cours d'Algèbre supérieure. Paris 1849 p. 330.

Ed in fatti potendo una somma di due quadrati, fra loro primi, essere anche rappresentata generalmente dal secondo membro della (12), ogni divisore di essa dovrà essere certo la somma di due quadrati, ma questi potranno anche *non essere primi fra loro.*

8.° Se il numero c sia tale, che ognuno de' suoi spezzamenti nella somma di due quadrati, si componga di due numeri primi fra loro, primieramente sarà $S = 1$, $\mu = 0$; secondariamente dovrà verificarsi o la condizione

$$(13) \quad \alpha = \beta = \ldots = 0, \quad \gamma = 2, \quad \text{e perciò} \quad c = h^2{}_{k-n}:$$

o l'altra

$$(14) \quad \alpha = \beta = \gamma = \ldots = 1, \quad \text{e perciò} \quad c = h_1\, h_2\, h_3 \ldots h_k .$$

Dunque se due numeri x, y sieno primi fra loro, ed inoltre la somma c dei loro quadrati sia della forma prescritta, o dalle (13), o dalle (14), qualunque divisore della x^2+y^2 sarà pure una somma di due quadrati primi fra loro.

Questo teorema, che pure, come i due precedenti, deducemmo dai criteri per lo spezzamento di un numero in somme ognuna di due quadrati, diversifica da quello sopra citato (7°) di Legendre, per l'aggiunta delle condizioni (13), (14), le quali però sono indispensabili a verificare il teorema stesso.

L'argomento di questa nota sarà da noi ripreso, per trattare del caso di k fratto, positivo, e negativo.



SULLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE NEI PROBLEMI DELLA DINAMICA.

MEMORIA

DEL PROF. FRANCESCO BRIOSCHI



Le ricerche di Eulero, di Lagrange, e di Laplace intorno le variazioni degli elementi delle orbite dei pianeti furono il primo passo alla teorica della variazione delle costanti arbitrarie nei problemi della Dinamica. Le formole generali per le quali si hanno le variazioni delle costanti vennero trovate da Lagrange; esse danno i valori delle derivate parziali rispetto alle costanti della funzione delle forze perturbatrici espressi per mezzo della somma dei prodotti, delle derivate rispetto al tempo delle medesime costanti arbitrarie, per alcune espressioni, la proprietà caratteristica delle quali si è di non contenere esplicitamente il tempo. Col mezzo di queste formole la ricerca della variazione delle costanti è ridotta alla risoluzione di molte equazioni di primo grado ad altrettante incognite. Allo scopo di evitare questa operazione Poisson pensò di esprimere le derivate delle costanti arbitrarie per mezzo delle derivate parziali della funzione delle forze perturbatrici, e le formole a cui giunse, le quali ponno dirsi le reciproche di quelle di Lagrange, contengono pure funzioni aventi la proprietà caratteristica identica alla esposta per quelle di Lagrange. I lavori più recenti di Cauchy, di Binet, ecc. sull' argomento contengono nuove dimostrazioni delle formole di Lagrange e di Poisson, ed applicazioni di esse a casi particolari. Devesi a Jacobi l' aver ri-

dotte le formole per la ricerca delle variazioni delle costanti a semplicissima forma, od averle ridotte, come le denomina quell'autore, alla loro *forma canonica.* Quelle formole si dicono avere la forma canonica, allorquando si possa esprimere la derivata rispetto al tempo di una qualsivoglia costante arbitraria, per la derivata parziale, rispetto ad un altra costante, della funzione delle forze perturbatrici; vale a dire allorquando saranno eguali all'unità alcune di quelle funzioni dotate della proprietà enunciata, e le altre saranno nulle. Lagrange aveva già dimostrato alla Sez. V.ª della seconda parte della M. A. come ciò avvenga ogni qualvolta si assumano a costanti arbitrarie i valori iniziali delle coordinate, ed altre quantità dipendenti dai valori iniziali delle velocità componenti; questa osservazione non era sfuggita al Poisson; ma Jacobi in un teorema enunciato nel T. V.° dei Comptes Rendus, e dimostrato in seguito dal Sig. Desboves ha dato un'altro sistema di costanti per le quali verificasi quella proprietà. Queste costanti arbitrarie sono quelle che si incontrano allorquando si determinano gli integrali di un problema di Dinamica col mezzo di una equazione alle derivate parziali del primo ordine come insegnarono Hamilton e Jacobi.

È noto che indicando con $q_1, q_2, \ldots q_n$, n variabili indipendenti, in funzione delle quali sieno date le coordinate dei punti di un sistema; con T la semisomma delle forze vive, con U la funzione delle forze, e con $p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$ ordinatamente le espressioni $\frac{dT}{dq'_1}, \frac{dT}{dq'_2}, \ldots\ldots \frac{dT}{dq'_n}$, e denominando φ una soluzione completa della equazione alle derivate parziali del primo ordine:

$$(1) \qquad T - U + \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

le equazioni:

$$(2)\begin{cases} p_1 = \frac{d\varphi}{dq_1}, \quad p_2 = \frac{d\varphi}{dq_2}, \ldots \quad p_n = \frac{d\varphi}{dq_n} \\ \beta_1 = \frac{d\varphi}{d\alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{d\varphi}{d\alpha_2}, \ldots \quad \beta_n = \frac{d\varphi}{d\alpha_n} : \end{cases}$$

sono le equazioni integrali del movimento ; nelle quali α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_n$ sono le n costanti introdotte dall' integrazione della equazione alle derivate parziali, ed insieme alle β_1, $\beta_2 \ldots \beta_n$ sono le $2n$ costanti arbitrarie delle equazioni integrali del movimento.

Ora indicando con $\left(\frac{d\varphi}{d\alpha_s}\right)$, la derivata totale della funzione φ rispetto ad α_s si ha :

$$\left(\frac{d\varphi}{d\alpha_s}\right) = \frac{d\varphi}{d\alpha_s} + \sum_r \frac{d\varphi}{dq_r} \frac{dq_r}{d\alpha_s}, \quad \left(\frac{d\varphi}{d\beta_s}\right) = \sum_r \frac{d\varphi}{dq_r} \frac{dq_r}{d\beta_s}$$

le quali equazioni osservando alle superiori si mutano nelle:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\alpha_s}\right) = \beta_s + \sum_r p_r \frac{dq_r}{d\alpha_s}, \quad \left(\frac{d\varphi}{d\beta_s}\right) = \sum_r p_r \frac{dq_r}{d\beta_s} .$$

Si derivi la prima di queste equazioni rispetto a β_s, la seconda rispetto ad α_s, e sottraendo i risultamenti si ottiene la

$$\sum_r \left(\frac{dp_r}{d\alpha_s} \frac{dq_r}{d\beta_s} - \frac{dp_r}{d\beta_s} \frac{dq_r}{d\alpha_s}\right) = 1 .$$

Affatto analogamente si dimostrerebbero le altre tre equazioni seguenti :

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_r\left(\frac{dq_r}{d\alpha_i}\frac{dp_r}{d\alpha_s}-\frac{dq_r}{d\alpha_s}\frac{dp_r}{d\alpha_i}\right)=0,\\&\sum_r\left(\frac{dq_r}{d\beta_i}\frac{dp_r}{d\beta_s}-\frac{dq_r}{d\beta_s}\frac{dp_r}{d\beta_i}\right)=0,\\&\sum_r\left(\frac{dq_r}{d\alpha_i}\frac{dp_r}{d\beta_s}-\frac{dq_r}{d\beta_s}\frac{dp_r}{d\alpha_i}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

I primi membri di queste equazioni sono i tipi di tutte quelle funzioni che entrano nelle formole generali date da Lagrange per la ricerca delle variazioni delle costanti arbitrarie.

La proprietà or ora dimostrata per le funzioni di Lagrange, sussiste anche per quelle che entrano a comporre le formole di Poisson; vale a dire alcune di esse si annullano identicamente, ed altre eguagliano l' unità. Dal confronto delle formole di perturbazione ridotte alla forma canonica con quelle trovate da Poisson, nasce spontanea l'esposta osservazione; ma per distinguere quelle funzioni che annullansi da quelle che sono eguali all'unità, faremo uso di alcune formole dovute al Sig. Cauchy, le quali contengono le relazioni generali fra le funzioni di Lagrange, e quelle di Poisson. Denominiamo a_1, $a_2 \ldots . a_{2n}$, $2n$ costanti arbitrarie di un problema di Dinamica, e poniamo per brevità:

$$(a_i\,,\,a_s)=\sum_r\left(\frac{dp_r}{da_i}\frac{dq_r}{da_s}-\frac{dp_r}{da_s}\frac{dq_r}{da_i}\right)$$

$$[a_i\,,\,a_s]=\sum_r\left(\frac{da_i}{dp_r}\frac{da_s}{dq_r}-\frac{da_i}{dq_r}\frac{da_s}{dp_r}\right)$$

la seconda delle quali espressioni è il tipo delle funzioni di Poisson. Le formole dovute al Sig. Cauchy si ponno ridurre

alle due seguenti:

$$\sum_r (a_i\,,\,a_r)\,[a_i\,,\,a_r] = 1\,, \quad \sum_r (a_i\,,\,a_r)\,[a_s\,,\,a_r] = 0.$$

Quindi osservando alle equazioni (3) dedurremo facilmente, che supposte le costanti del problema essere le $\alpha_1, \alpha_2 \ldots.$ $\beta_1, \beta_2 \ldots.$, sussisteranno le equazioni:

$$(4)\quad [\alpha_r\,,\,\beta_r]=1,\ [\alpha_s\,,\,\beta_r]=0,\ [\alpha_s\,,\,\alpha_r]=0,\ [\beta_r\,,\,\beta_s]=0.$$

Ciò posto se si ritengono le formole del moto non perturbato rappresentate dalle equazioni:

$$\left(\frac{dq_r}{dt}\right)=\frac{d(T-U)}{dp_r}\,, \qquad \left(\frac{dp_r}{dt}\right)=-\frac{d(T-U)}{dq_r}$$

nelle quali facciasi $r = 1\,,\,2\,\ldots.\,n$; e le formole del moto perturbato rappresentate dalle:

$$\frac{dq_r}{dt}=\frac{d(T-U-P)}{dp_r}\,, \qquad \frac{dp_r}{dt}=-\frac{d(T-U-P)}{dq_r}$$

nelle quali P rappresenta la funzione perturbatrice; sussisteranno le equazioni

$$\sum_r\left[\frac{d\alpha_s}{dq_r}\left(\frac{dq_r}{dt}\right)+\frac{d\alpha_s}{dp_r}\left(\frac{dp_r}{dt}\right)\right]=0, \quad \sum_r\left(\frac{d\alpha_s}{dq_r}\,\frac{dq_r}{dt}+\frac{d\alpha_s}{dp_r}\,\frac{dp_r}{dt}\right)=\frac{d\alpha_s}{dt}$$

e per conseguenza:

$$\frac{d\alpha_s}{dt}=\sum_r\left(\frac{d\alpha_s}{dp_r}\,\frac{dP}{dq_r}-\frac{d\alpha_s}{dq_r}\,\frac{dP}{dp_r}\right).$$

Ora si osservi essere

$$\frac{dP}{dq_r}=\sum_i\left(\frac{dP}{d\alpha_i}\,\frac{d\alpha_i}{dq_r}+\frac{dP}{d\beta_i}\,\frac{d\beta_i}{dq_r}\right),\ \frac{dP}{dp_r}=\sum_i\left(\frac{dP}{d\alpha_i}\,\frac{d\alpha_i}{dp_r}+\frac{dP}{d\beta_i}\,\frac{d\beta_i}{dp_r}\right).$$

per cui sostituendo, ed avendo riguardo alle equazioni (4) si ha:

$$\frac{d\alpha_s}{dt} = \frac{dP}{d\beta_s} .$$

Le formole per la variazione delle costanti ridotte alla loro forma canonica sono quindi le:

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{dP}{d\beta_1}, \frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{dP}{d\beta_2} \cdots\cdots \frac{d\alpha_n}{dt} = \frac{dP}{d\beta_n} \\ \frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{dP}{d\alpha_1}, \frac{d\beta_2}{dt} = -\frac{dP}{d\alpha_2} \cdots\cdots \frac{d\beta_n}{dt} = -\frac{dP}{d\alpha_n} \end{array} \right.$$

Osserviamo che allorquando U non contenga esplicitamente il tempo, e quindi abbia luogo il principio delle forze vive si ha:

$$T - U = \alpha_r ,$$

e che supponendo essere la funzione ψ una soluzione completa di quest'ultima equazione gli integrali del problema sono dati dalle:

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{d\psi}{dq_1}, \quad p_2 = \frac{d\psi}{dq_2} \cdots\cdots p_n = \frac{d\psi}{dq_n} \\ \beta_1 = \frac{d\psi}{d\alpha_1}, \cdots\cdots \beta_r + t = \frac{d\psi}{d\alpha_r} \cdots\cdots \beta_n = \frac{d\psi}{d\alpha_n}; \end{array} \right.$$

ma le equazioni (4) sussisteranno ancora, e le (5) daranno ancora la variazione delle costanti. La proprietà caratteristica delle funzioni $[a_t, a_s]$ di rimanere costanti per tutta la durata del movimento venne da Jacobi considerata come utile mezzo nella ricerca degli integrali dei problemi di Dinamica. Infatti in una lettera, diretta da quel celebre autore all'Accademia delle Scienze di Parigi poco tempo dopo la morte di Poisson, a proposito della proprietà di quelle funzioni

enuncia il seguente teorema: supponendo che in un problema di dinamica abbia luogo il principio delle forze vive, se si conoscono due altri integrali, oltre l' integrale fornito da questo principio, se ne può dedurre un terzo in un modo diretto, e senza neppure fare uso di quadrature. Continuando il medesimo processo si otterrà un quarto, un quinto integrali e così via.

Il processo a cui allude Jacobi si è di approfittare della proprietà della funzione $[a_r, a_s]$, formata mediante le due costanti dei due integrali conosciuti, coll'eguagliarla ad una terza costante arbitraria, ed ottenere così in generale un altro integrale. Poisson aveva già osservato come questa terza costante arbitraria potrà in alcuni casi ridursi ad una costante determinata, e Jacobi nella lettera citata fa riflettere come quel terzo, quarto ... integrali ottenuti in quel modo potranno in questioni particolari risultare da combinazioni dei già trovati. Bertrand (*) in un recente lavoro sulla integrazione delle equazioni della dinamica, giunse a dimostrare come questi due casi rientrino l'uno nell'altro, e come possano esistere per un problema qualunque di Dinamica, integrali che soddisfano all'una od all'altra delle equazioni:

$$(7) \qquad [a_r, a_s] = 1, \qquad [a_r, a_s] = 0.$$

Poggiando sulla dimostrata possibilità di ridursi identiche queste due ultime equazioni il Sig. Bertrand deduce un metodo per la ricerca degli integrali di un problema, allorquando uno, o più di essi siano conosciuti, e lo applica vantaggiosamente in varj casi particolari. Infatti supponendo che a_s fosse costante arbitraria di un integrale conosciuto, le equazioni (7) sono equazioni alle derivate parziali del primo ordine e lineari, le quali in molti casi particolari, saranno integrabili, e forniranno altri integrali del problema. Se con-

(*) Journal de Liouville. Octobre 1852.

sideriamo ora che supposte le costanti a_1, a_2 .... a_{2n} rispettivamente eguali alle α_1, α_2 .... β_1, β_2 .... sussistono identicamente le equazioni (4); è chiaro che per tutti gli integrali di un problema di dinamica potranno verificarsi equazioni analoghe alle (7); e che in questo caso gl'integrali medesimi saranno quelli che si ottengono col metodo di Hamilton. In questo modo viene a generalizzarsi l'importante processo dovuto al Sig. Bertrand, e viene determinato un sistema di costanti arbitrarie pel quale esso ha luogo.

Per rendere più chiaro il nesso fra gli integrali ottenuti col metodo di Hamilton, e quelli che si hanno dal metodo di Bertrand, incominceremo dal considerare il movimento di un punto materiale attratto da un centro fisso, supponendo la grandezza dell'azione essere una funzione del raggio vettore. Le equazioni alle derivate rappresentanti questo movimento sono:

$$\frac{dx}{dt}=x',\quad \frac{dy}{dt}=y',\quad \frac{dx'}{dt}=-\varphi(r)\frac{x}{r},\quad \frac{dy'}{dt}=-\varphi(r)\frac{y}{r}$$

Il principio delle forze vive da

$$x'^2+y'^2=(U+\alpha_1)$$

essendo $U=-\int\varphi(r)dr$, ed α_1 una costante. Pel noto metodo di Hamilton fatto

$$x'=\frac{d\psi}{dx},\quad y'=\frac{d\psi}{dy}$$

la equazione alle derivate parziali sarà:

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2=2(U+\alpha_1)\,.$$

Un integrale di questa equazione essendo:

$$\psi=\alpha_2\,\text{Arc.tang.}\frac{y}{x}+\int\frac{\sqrt{[2(U+\alpha_1)r^2-\alpha^2_2]}}{r}dr,$$

nella quale α_2 è una nuova costante; gli integrali del problema saranno:

$$\frac{d\psi}{d\alpha_1}=\int\frac{r}{\sqrt{[2(U+\alpha_1)r^2-\alpha^2{}_2]}}dr=\beta_1+t,$$

$$\frac{d\psi}{d\alpha_2}=\text{Arc.tang.}\frac{y}{x}-\int\frac{\alpha_2}{r\sqrt{[2(U+\alpha_1)r^2-\alpha^2{}_2]}}dr=\beta_2.$$

Gl'integrali *intermedj* sarebbero dati dalle equazioni

$$x'=-\alpha_2\frac{y}{r^2}+\frac{\sqrt{[2(U+\alpha_1)r^2-\alpha^2{}_2]}}{r}\frac{x}{r}$$

$$y'=\alpha_2\frac{x}{r^2}+\frac{\sqrt{[2(U+\alpha_1)r^2-\alpha^2{}_2]}}{r}\frac{y}{r}.$$

Dalle quali si ha il quarto integrale:

$$xy'-x'y=\alpha_2.$$

Ora osserviamo, che, per quanto si è dimostrato, le funzioni di Poisson per questo caso particolare devono avere i valori:

$$(8)\left\{\begin{array}{l}[\alpha_1,\beta_1]=1,\quad[\alpha_2,\beta_2]=1,\\ [\alpha_1,\alpha_2]=[\alpha_1,\beta_2]=[\alpha_2,\beta_1]=[\beta_1,\beta_2]=0.\end{array}\right.$$

Il Prof. Bertrand applicando il suo metodo a questo caso ammette l'integrale del principio delle aree, e quindi le equazioni alle derivate parziali di primo ordine e lineari sono le due:

$$(9)\qquad[\alpha_2,a]=0,\qquad[\alpha_2,b]=1$$

essendo a, b costanti arbitrarie. L'integrazione della prima di queste equazioni conduce quell'autore a due nuovi integrali, di cui l'uno è una combinazione degli integrali del principio delle aree, e di quello delle forze vive, e l'altro dà il valore del tempo; e l'integrazione della seconda dà la

equazione della trajettoria. Ora vedesi facilmente come i medesimi tre integrali corrispondono alle tre equazioni :

(10) $[\alpha_1 , \alpha_2] = 0, \quad [\alpha_2 , \beta_1] = 0 , \quad [\alpha_2 , \beta_2] = 1$

le quali sono fra le sei equazioni (8), le sole tre in cui entri la costante α_2 . Dunque la integrazione delle due equazioni (9) alle derivate parziali lineari dà risultamenti identici a quelli ottenuti coll'integrare la equazione di Hamilton.

Consideriamo ora il movimento di un punto materiale in un piano, essendo :

$$U = \frac{1}{r^2}\,\varphi(\text{tang}\ \omega)$$

la funzione delle forze. É il secondo esempio discusso dal Sig. Bertrand. Si avrà

$$r'^2 + r^2\,\omega'^2 = 2\left(\frac{1}{r^2}\,\varphi(\text{tang}.\omega) + \alpha_1\right)$$

e quindi l'equazione di Hamilton sarà

$$\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)^2 = 2\ \left(\frac{1}{r^2}\,\varphi(\text{tang}.\omega) + \alpha_1\right)$$

una soluzione completa della quale è la :

$$\psi = \int \frac{\sqrt{(2\alpha_1\,r^2 - \alpha_2)}}{r}\,dr + \int \sqrt{[2\varphi\ (\text{tang}.\omega) + \alpha_2]}\ d\omega$$

essendo α_2 una nuova costante. Gli integrali del problema saranno :

$$\frac{d\psi}{d\alpha_1} = \frac{\sqrt{(2\alpha_1\,r^2 - \alpha_2)}}{2\alpha_1} = t + \beta_1\ ,$$

$$\frac{d\psi}{d\alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}\ \text{Ang. tang}.r\ \frac{\sqrt{2\alpha_1} - \sqrt{(2\alpha_1\,r^2 - \alpha_2)}}{\sqrt{\alpha_2}}$$

$$+ \int \frac{1}{2\sqrt{[2\varphi(\text{tang}.\omega) + \alpha_2]}}\ d\omega = \beta_2\ .$$

Gl'integrali intermedj verranno dati dalle equazioni :

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{\sqrt{(2\alpha_1 r^2 - \alpha_2)}}{r}, \quad \frac{d\psi}{d\omega} = \sqrt{[2\varphi\,(\text{tang}.\omega) + \alpha_2]}$$

ed essendo $\frac{d\psi}{d\omega} = r^2\,\omega'$, la costante arbitraria α_2 appartiene all'integrale del principio delle aree. Le (9) sono le equazioni da cui parte il Sig. Bertrand nella trattazione di questo esempio, e le (10) si verificheranno per esso.

Applicheremo ora il metodo del Sig. Bertrand alla ricerca delle circostanze del moto di un punto sopra una superficie. Immaginando sulla superficie due sistemi di linee ortogonali rappresentati dalle equazioni $u = \text{cost}^e$, $v = \text{cost}^e$; e supponendo che le linee del secondo sistema sieno geodetiche, si avrà :

$$T = \frac{1}{2}(u'^2 + Gv'^2).$$

Supporremo essere G funzione della sola variabile u, e ciò aver anche luogo per la funzione delle forze che denomineremo U. Posto

$$p = \frac{dT}{du'}, \quad q = \frac{dT}{dv'}$$

le equazioni del moto saranno :

$$\frac{du}{dt} = p, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{G}q, \quad \frac{dp}{dt} = \frac{dU}{du} - \frac{1}{2}\frac{dG}{du}v'^2, \quad \frac{dq}{dt} = 0,$$

ed il principio delle forze vive dà :

$$u'^2 + Gv'^2 = 2(U + \alpha_1).$$

Dall'ultima delle equazioni superiori si ha un secondo integrale del problema; cioè :

$$q = Gv' = \alpha_2.$$

Sia :

$$a = \varphi(u, v, p, q, t)$$

un altro integrale; formata la equazione $[a, \alpha_2] = 0$, si ottiene $\frac{da}{dv} = 0$, quindi si avranno per a l'una o l'altra delle due forme

$$(11) \quad \begin{cases} a = \psi(u, p\ q) \\ a = t + \psi(u, p, q) \end{cases}$$

e formata la equazione $[b, \alpha_2] = 1$ si hanno le:

$$(12) \quad \begin{cases} b = v + f(u, p, q) \\ b = t + v + f(u, p, q) \end{cases}.$$

La prima delle (11) derivata rispetto a t, avuto riguardo alle equazioni del movimento dà:

$$\frac{da}{du}p + \frac{da}{dp}\left(\frac{dU}{du} - \frac{1}{2}\frac{dG}{du}v'^2\right) = 0,$$

la quale integrata dà

$$a = F\left[p^2 - 2\left(U - \frac{1}{2}Gv'^2\right)\right] = F(2\alpha_1)$$

cioè la costante a è una funzione della costante delle forze vive. La seconda delle (11) dà:

$$1 + \frac{da}{du}p + \frac{da}{dp}\left(\frac{dU}{du} - \frac{1}{2}\frac{dG}{du}v'^2\right) = 0;$$

e quindi

$$a = t + \frac{1}{\sqrt{\left(2(U + \alpha_1) - \frac{\alpha_2^2}{G}\right)}}du,$$

trascurando una funzione arbitraria della costante α_1. Questa equazione dà il valore del tempo, ed è un terzo integrale del problema. La prima delle (12) dà:

$$-G\frac{df}{du}=\frac{\alpha_2}{p}\quad,\qquad p=\sqrt{\left(2(U+\alpha_1)-\frac{\alpha_2^2}{G}\right)}\;;$$

quindi

$$b=v-\int\frac{\alpha_2}{G\sqrt{\left(2(U+\alpha_1)-\frac{\alpha_2^2}{G}\right)}}du,$$

che è il quarto integrale del problema. La seconda delle equazioni (12) darebbe evidentemente una combinazione di questi due ultimi integrali.

Queste formole sono applicabili allorquando la superficie sia di rotazione, e la forza acceleratrice si supponga diretta ad ogni istante del tempo nel piano del meridiano corrispondente al punto della superficie in cui trovasi il mobile; e si giunge così ai risultati ottenuti dal sig. Jacobi.

A riscontro dei metodi osserviamo che in questo esempio la equazione di Hamilton avrebbe la forma:

$$\left(\frac{d\psi}{du}\right)^2+\frac{1}{G}\left(\frac{d\psi}{dv}\right)^2=2(U+\alpha_1)$$

la quale nelle poste condizioni è soddisfatta dalla:

$$\psi=\alpha_2 v+\int\sqrt{\left(2(U+\alpha_1)-\frac{\alpha_2^2}{G}\right)}du,$$

e quindi gli integrali del problema saranno:

$$\frac{d\psi}{du}=\sqrt{\left(2(U+\alpha_1)-\frac{\alpha_2^2}{G}\right)}=p,\quad \frac{d\psi}{dv}=\alpha_2=q$$

$$\frac{d\psi}{d\alpha_1}=\int\frac{1}{\sqrt{\left(2(U+\alpha_1)-\frac{\alpha_2^2}{G}\right)}}du=\beta_1+t,$$

$$\frac{d\psi}{d\alpha_2}=v-\int\frac{\alpha_2}{G\sqrt{\left(2(U+\alpha_1)-\frac{\alpha_2^2}{G}\right)}}du=\beta_2,$$

i quali appunto corrispondono ai trovati più sopra.

La dimostrata proprietà per le espressioni $[\alpha_r, \beta_r]$, conduce alla generalizzazione di un teorema dimostrato da Jacobi (1) pel movimento elittico dei pianeti, e dal medesimo autore enunciato come generale per un movimento qualunque, supposte però le costanti arbitrarie essere i valori iniziali delle quantità variabili che entrano nel problema. Infatti sussistendo identicamente la :

$$\sum_s \left(\frac{d\alpha_r}{dp_s} \frac{d\beta_r}{dq_s} - \frac{d\alpha_r}{dq_s} \frac{d\beta_r}{dp_s} \right) = 1$$

saranno anco soddisfatte le :

$$p'_1 : p'_2 : \ldots\ldots : q'_1 : q'_2 : \ldots\ldots : \alpha'_r = \frac{d\beta_r}{dq_1} : \frac{d\beta_r}{dq_2} : \ldots\ldots : - \frac{d\beta_r}{dp_1} : - \frac{d\beta_r}{dp_2} \ldots\ldots : 1$$

dalle quali si hanno le :

$$\frac{dp_s}{d\alpha_r} = \frac{d\beta_r}{dq_s} \,, \qquad \frac{dq_s}{d\alpha_r} = - \frac{d\beta_r}{dp_s} \,.$$

Queste ultime equazioni contengono il teorema di Jacobi (*); per cui quel teorema ha luogo anche allorquando le costanti arbitrarie sieno quelle date dal metodo di Hamilton.

Le relazioni trovate fra la equazione (1), e le equazioni (4), si ponno estendere in generale alle equazioni a derivate parziali, considerando le relazioni stabilite dal Sig. Jacobi, fra una equazione qualsivoglia a derivate parziali, e le equazioni analoghe alle (2) ottenute, mediante una soluzione completa di essa.

Pavia il 27 Giugno 1853.

(*) Jacobi, Mathematische Werke. Band. 1. Neues Theorem der analytischen Mechanik.



SULL' INTEGRALE COMPLETO DELL' EQUAZIONE

$$(1)\quad 0=\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)\frac{d^2z}{dy^2}+\left(1+\frac{dz^2}{dy^2}\right)\frac{d^2z}{dx^2}-2\,\frac{dz}{dx}\,\frac{dz}{dy}\,\frac{d^2z}{dxdy}\;.$$

NOTA

DELL' AB. REMIGIO DEL GROSSO

Si sa che Monge cercando l'integrale completo di questa equazione, trovò che supponendo

$$(2)\quad \begin{cases} x=u+v \\ y=\varphi(u)+\psi(v) \\ z=\sqrt{-1}\,[\int du\sqrt{(1+\varphi'^2(u))}+\int dv\sqrt{(1+\psi'^2(v))}]\,, \end{cases}$$

la proposta equazione (1) è soddisfatta. Siccome dunque il sistema di equazioni (2) contiene le due funzioni arbitrarie $\varphi(u)$, $\psi(v)$ di due variabili ausiliarie u, v, l'illustre geometra ne conchiuse esser questo sistema di equazioni l'integrale richiesto.

Non ha guari ripigliando io a fare la ricerca dell'integrale completo della (1), mi avvidi che al sistema dell' equazioni (2) poteva sostituirsi un sistema più semplice di equazioni, le quali contenendo a lor volta due funzioni arbitrarie, soddisfacevano alla suddetta equazione differenziale. Ne conclusi perciò che questo nuovo sistema di equazioni costituisce pur esso l'integral completo della (1). Siccome questa equazione differenziale ha grande estensione nell'alta Geometria, mi è parso che questo mio ritrovato possa essere di qualche utile, e però mi sono ardito di richiamarvi sopra l'attenzione de' Geometri.

Poniamo per brevità

$$\frac{dz}{dx}=p\,, \qquad \frac{dz}{dy}=q,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=r\,, \quad \frac{d^2z}{dxdy}=s\,, \quad \frac{d^2z}{dy^2}=t\,,$$

e sostituendo nella (1) avremo

$$(3) \qquad 0=(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t.$$

Ma si ha pure

$$dp=rdx+sdy\,,$$
$$dq=sdx+tdy\,;$$

onde sostituendo nella (3) i valori di r, t che risultano da queste equazioni, si ottiene

$$0=(1+q^2)dpdy+(1+p^2)dq\,dx$$
$$-s\Big((1+q^2)dy^2+2pq\,dxdy+(1+p^2)dx^2\Big)\,,$$

equazione che si risolve nelle altre due simultanee.

$$(4)\begin{cases} 0=(1+q^2)dpdy+(1+p^2)dqdx \\ 0=(1+q^2)dy^2+2pqdxdy-(1+p^2)dx^2\,. \end{cases}$$

Ora si tratta di ricavare dal sistema di equazioni (4) una equazione in p, q, la quale soddisfaccia alla (3); e se questa equazione contiene una funzione arbitraria, sarà un integrale primo completo della equazione suddetta.

Dalla prima dell'equazioni (4) si deduce

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1+p^2}{1+q^2}\,\frac{dq}{dp}\,;$$

onde ponendo la seconda delle suddette equazioni sotto la

forma

$$0 = \frac{dy^2}{dx^2}(1+q^2) + 2\frac{dy}{dx}pq + 1 + p^2 ,$$

ed eliminandone $\frac{dy}{dx}$ col soccorso della equazione precedente si ottiene agevolmente

$$0 = (1+p^2)\frac{dq^2}{dp^2} - 2pq\frac{dp}{dq} + 1 + q^2.$$

Risolvendo questa equazione rispetto a dq, si ha

$$(5) \qquad dq = \frac{pq \pm \sqrt{(1+p^2+q^2)}\sqrt{-1}}{1+p^2}dp.$$

Per separare le variabili in questa equazione, suppongo

$$1 + p^2 + q^2 = (\beta - q)^2 ,$$

rappresentando β una nuova variabile, ed ottengo successivamente

$$q = \frac{\beta^2 - p^2 - 1}{2\beta}$$

$$\beta - q = \frac{\beta^2 + p^2 + 1}{2\beta}$$

$$dq = \frac{(\beta^2 - p^2 - 1)d\beta - 2pdp}{2\beta^2} .$$

Sostituendo questi valori nella (5) si ha

$$\frac{(\beta^2 + p^2 + 1)d\beta - 2\beta pdp}{2\beta^2} = \frac{p(\beta^2 - p^2 - 1)}{2(1+p^2)\beta}dp$$

$$\pm \frac{(\beta^2 + p^2 + 1)\sqrt{-1}}{2(1+p^2)\beta}dp ,$$

equazione che agevolmente si traduce in

$$\frac{(\beta^2+p^2+1)d\beta}{\beta}=\frac{(\beta^2+p^2+1)(p\pm\sqrt{-1})dp}{1+p^2},$$

ed alla quale si soddisfa ponendo

$$(6)\qquad \beta^2+p^2+1=0,$$

$$(7)\qquad \frac{d\beta}{\beta}=\frac{(p\pm\sqrt{-1})dp}{p^2+1}.$$

Dall'equazione (6) si deduce

$$\beta^2=-p^2-1,$$

e conseguentemente

$$(8)\qquad q=\beta=\pm\sqrt{(1+p^2)}\sqrt{-1}.$$

Questa equazione soddisfa alla (3). Difatti si ha

$$\frac{dq}{dx}=s=\frac{\pm p\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+p^2)}}\frac{dp}{dx}=\frac{\pm pr\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

$$\frac{dq}{dy}=t=\frac{\pm p\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+p^2)}}\frac{dp}{dy}=\pm\frac{p^3\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+p^2)}}=\frac{-p^2r}{1+p^2}$$

onde sostituendo nella (3) si ottiene

$$0=[1-(1+p^2)]r+2p^2r-p^2r=-2pr+2p^2r;$$

onde l'equazione (8) deve riguardarsi, o come *integrale particolare,* o come *soluzione particolare* della (3). Vedremo da qui a poco come sia una *soluzione particolare.* Quindi gl'integrali primi della (3) dipendono dall'equazione (7).

Integrando l'equazione (7), troveremo

$$\log.\beta=\log.C'+\frac{1}{2}\log(1+p^2)\pm\text{arc}(\text{tg}=p)\sqrt{-1},$$

e quindi

$$\beta=C'\sqrt{(1+p^2)}\,e^{\mp\text{arc}(\text{tg}=p)\sqrt{-1}}$$

rappresentando C' una costante arbitraria , ed e la base de' logaritmi iperbolici. Ma si ha

$$e^{\mp\omega\sqrt{-1}} = \cos\omega \pm \operatorname{sen}\omega\sqrt{-1}\ ;$$

onde posto

$$\omega = \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = p)$$

si trova

$$\operatorname{tg}\omega = p\ ,\quad \cos\omega = \frac{1}{\sqrt{(1+p^2)}}\ ,\quad \operatorname{sen}\omega = \frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}\ ,$$

e quindi

$$e^{\mp\operatorname{arc}(tg=p)\sqrt{-1}} = \frac{1 \pm p\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+p^2)}}\ .$$

Sostituendo nella espressione di β si ottiene

$$\beta = C'(1 \pm p\sqrt{-1})\ ,$$

e quindi

$$q - \sqrt{(1+p^2+q^2)} = C'(1 \pm p\sqrt{-1}).$$

Ricavando da questa equazione il valore di q, viene

$$(9)\qquad q = \frac{C'^2 - 1}{2C'} \pm \frac{C'^2+1}{2C'}\, p\sqrt{-1}\ .$$

Questa equazione é un integrale particolare della (3). Di fatti si ha

$$\frac{dq}{dx} = s = \pm\frac{C'^2+1}{2C'}\,\frac{dp}{dx}\sqrt{-1} = \pm\frac{C'^2+1}{2C}\,r\sqrt{-1}$$

$$\frac{dq}{dy} = t = \pm\frac{C'^2+1}{2C'}\,\frac{dp}{dy}\sqrt{-1} = \pm\frac{C'^2+1}{2C'}\,s\sqrt{-1}$$

$$= -\left(\frac{C'^2+1}{2C'}\right)r\ ;$$

onde sostituendo si ottiene

$$0 = (1 + q^2)r \pm 2pq\left(\frac{C'^2+1}{2C'}\right)r\sqrt{-1} - \left(\frac{C'^2+1}{2C'}\right)^2(1+p^2)r$$

la qual'equazione si traduce in

$$0 = 1 - \left(\frac{C'^2+1}{2C'}\right)^2 + \left[q \pm p\left(\frac{C'^2+1}{2C'}\right)\sqrt{-1}\right]^2 .$$

Ma dalla (9) si deduce

$$q \pm \left(\frac{C'^2+1}{2C'}\right)p\sqrt{-1} = \frac{C'^2-1}{2C'} .$$

Se dunque si sostituisce questo valore nella precedente equazione, verrà

$$0 = 1 - \left(\frac{C'^2+1}{2C}\right)^2 + \left(\frac{C'^2-1}{2C'}\right)^2$$

equazione identica, com'è evidente.

Prima di passare oltre è bene mostrare come la (8) sia una soluzione particolare della (9). A tale oggetto basterà supporre

$$C' = \sqrt{\left(\frac{1 \pm p\sqrt{-1}}{1 \mp p\sqrt{-1}}\right)}\sqrt{-1} ,$$

e sostituire nella (9) questo valore di C'. Di fatti risultando

$$\frac{C'^2-1}{2C'} = \frac{1}{2}\left(C' - \frac{1}{C'}\right) = \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{1 \pm p\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)$$

$$+ \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{1 \mp p\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+p^2)}}\right) = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+p^2)}}$$

$$\frac{C'^2+1}{2C'} = \frac{1}{2}\left(C' + \frac{1}{C'}\right) = \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{1 \pm p\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)$$

$$- \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{1 \pm p\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+p^2)}}\right) = \frac{\pm p}{\sqrt{(1+p^2)}} ,$$

si avrà in seguito della sostituzione di questi valori nella (9)

$$q = \frac{(1+p^2)\sqrt{-1}}{\sqrt{(1+p^2)}} = \sqrt{-1}\sqrt{(1+p^2)}.$$

Se nell'equazione (9) si pone $C'=1$, si ha

$$q = \pm p\sqrt{-1},$$

e conseguentemente

$$0 = \frac{dz}{dx} \pm \frac{dz}{dy}\sqrt{-1}.$$

L'integrale di questa equazione, siccome si sa, è dato dalla formola

$$(10) \qquad z = F(y \pm x\sqrt{-1}).$$

Questa equazione soddisfa alla (3) completamente. Di fatti si ha

$$\frac{dz}{dx} = p = \pm F'\sqrt{-1};\ \frac{dz}{dy} = F' = q;$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = r = -F'';\quad \frac{d^2z}{dy^2} = F'' = t;$$

$$\frac{d^2z}{dxdy} = s = \pm F''\sqrt{-1}.$$

Sostituendo nella (3) si ottiene

$$0 = -(1+F'^2)F'' + 2F'^2 F'' + (1-F'^2)F''$$

la qual'equazione è identica, come ognun vede. Ma siccome la (10) contiene una sola funzione arbitraria, così sarà sempre un integrale particolare della (3). Se poi la (9) s' integra nella sua generalità, si ottiene

$$(C'^2-1)x \pm (C'^2+1)z\sqrt{-1} = F(2C'x \pm (C'^2+1)y\sqrt{-1}),$$

e questa equazione soddisfa parimenti la (3). Or vi soddi-

sferà anche l'equazione

$$0=(C'^2-1)x\pm(C'^2+1)z\sqrt{-1}-F(2C'x\pm(C'^2+1)y\sqrt{-1})$$
$$+2T(C')\ \ldots\ldots\ (10),$$

rappresentando $T(C')$ una funzione arbitraria di C' diversa da F, tanto se C' si considera costante, tanto se si considera variabile, purchè però sia in questo secondo caso

$$0=C'x\pm C'z\sqrt{-1}-(x\pm C'y\sqrt{-1})F'(2C'x\pm(C'^2+1)y\sqrt{-1})$$
$$+T'(C')\ \ldots\ldots\ (11)$$

Se dunque si fa l'eliminazione di C' fra l'equazioni (10) ed (11), l'equazione risultante in x, y, z dovrà soddisfare alla (3). Ma questa equazione risultante contiene due funzioni arbitrarie; onde sarà l'integrale completo della proposta equazione (3) (*),

---

(*) Non sarà inutile verificare come la equazione

$$(C'^2-1)x\pm(C'^2+1)z\sqrt{-1}$$
$$=F(2C'x\pm(C'^2+1)y\sqrt{-1})$$

soddisfi alla equazione (3). Differenziando questa equazione si ottiene

$$p=\frac{dz}{dx}=\frac{2C'F'-(C'^2-1)}{\pm(C'^2+1)\sqrt{-1}}\ ;\quad q=\frac{dz}{dy}=F'\ ;$$

$$r=\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{4C'^2F''}{\pm(C'^2+1)\sqrt{-1}}\ ;\quad s=2C'F''=\frac{d^2z}{dxdy}\ ;$$

$$t=\frac{d^2z}{dy^2}=\pm(C'^2+1)F''\sqrt{-1}\ .$$

Di qui risulta

$$(1+q^2)r=\pm\frac{(1+F'^2)}{(C'^2+1)\sqrt{-1}}\,4C'^2F''\ ;$$

$$2pqs = \pm \frac{4C'F'F''[2C'F'-(C'^2-1)]}{(C'^2+1)\sqrt{-1}}$$

$$(1+p^2)t = \pm (C'^2+1)F''\left[1+\left(\frac{2C'F'-(C'^2-1)}{(C'^2+1)\sqrt{-1}}\right)^2\right]\sqrt{-1}$$

e conseguentemente

$$0 = [4C'^2 + 4C'^2F'^2] - [8C'^2F'^2 - 4C'F(C'^2-1)]$$

$$+ [(4C'^2F' - 4C'F'(C^2-1) + (C^2-1)^2] - (C'^2+1)^2$$

la qual'equazione è identica, essendo

$$(C'^2-1)^2 - (C'^2+1)^2 = -4C'^2.$$

PICCOLI RECLAMI

che pur sembran giusti.

DEL PROF. GIUSEPPE BIANCHI

1. Il celebre Humboldt nella III parte del Cosmos (dispensa 2, (ediz. del Turati a Milano 1853, traduzione francese del Galusky), ove al capitolo I della sezione 2 tratta del sole considerato come corpo centrale nel nostro sistema planetario, dice alla pag. 339 « Dietro le osservazioni esattissime di Laugier (Conti Resi dell' Accademia delle scienze, T. XV, 1842, pag. 941) la durata della rotazione (solare) è di 25.^{g} 8.^{h} 9.^{m}, e l'inclinazione dell'equatore di 7°. 9'. » E più innanzi alla pag. 348 egli soggiunge: « Il solo procedimento atto a far conoscere la durata della rotazion solare è dunque di prendere una media fra un grande numero di macchie, le quali per la permanenza di loro forma e per la distanza che le separa da altre macchie visibili al tempo stesso, garantiscono contro le eventualità degli errori. »

Tutto ciò è verissimo, ed era noto a me pure il bel lavoro del Laugier, che riuscì ad accertare con osservazioni

di macchie i precisi elementi della rotazion del sole; nella quale occasione il cel. Arago dichiarava innanzi all'Accademia delle scienze di Parigi tale determinazione dell'astronomo suo collega essere la più esatta e ben sicura di quante finora se ne produssero circa il tempo della rotazion solare. Per altro io avrei unicamente a riflettere che forse non è necessario a ben conoscere il tempo della rotazione il dedurlo per una media da un grande numero di macchie solari, permanenti, bastando per avventura una di queste, mantenutasi lungamente invariata di grandezza, figura e prossima apparenza nel disco solare, per inferirne assai verosimilmente la propria sua immobilità, e quindi averne dalle osservazioni più disgiunte la meno dubbiosa misura della rotazion comune. Questo caso, che per verità è raro a presentarsi, offerivasi da poc'oltre il mezzo novembre 1816 al mezzo febbrajo 1817 in una macchia piuttosto grande isolata circolare, e costante altresì di penombra che, osservata da me in Milano all'equatoriale di Sisson, mi porse alcuni risultamenti assai concordi circa il tempo della rotazione, sì che ne feci soggetto di una mia Memoria inserita e pubblicata nel 1821 dal Barone di Zach nel T. V della sua *Correspondance Astronomique* (Lettere XXI e XXVI). Il valor medio ch'io ne ottenni del tempo della rotazion assoluta (pag. 534. T. cit.) fu di $25^g, 340$, ossia precisamente quello confermato vent' anni dopo da Laugier; sebbene poi io ne reputassi più prossimo al vero quello alquanto minore di $25^g, 325$, e val a dire di $25^g. 7^h. 48^m$. E l'inclinazion pure dell'equator solare fu da me trovata, dopo lunghi calcoli e correzioni, di $7°.14'$ e perciò ben poco diversa da quella che fissava il Laugier. Trattandosi dunque che quella pubblicazione, ond'io esordiva nella carriera scientifica, precedette di vent'anni all'analoga, comechè più profonda e pregevole determinazione di Laugier; nè avendo io mancato di soddisfare ad alcun criterio di fiducia negli ottenuti valori, crederei che a me si apparten-

gano di diritto i valori stessi che attualmente si riteugeno per gli elementi della rotazion solare. Di che io non tenni veramente parola come avrei potuto far di leggieri a Parigi nel 1850, coi signori Arago e Laugier che, quanto dotti altrettanto ebbi a sperimentare verso me cortesissimi di accoglienze, e che al certo non mi avrebbero negata piena ragione giustificando sè medesimi di non aver veduto o ricordato il giornale di Zach e l'inseritovi mio scritto? E avrei pure continuato di buon grado ad obbliare il mio qualunque diritto in proposito, se non lo vedeva del pari dimenticato dall'eruditissimo autore del Cosmos, al quale non potevan essere sfuggiti gli argomenti esposti nel citato giornale di Zach, avvegnachè più spesso egli ricordi e citi l' anteriore *Monatliche Correspondez* del medesimo suo Connazionale ed amico.

Nell'*Annuaire* del Burò delle longitudini per l'anno 1852 il prelodato Arago, all'occasione di un rapporto da lui letto all'assemblea legislativa di Francia sopra l' assegnamento di 90 mila franchi per la nuova macchina equatoriale dell' osservatorio di Parigi, discorrendo con un rapido cenno sopra le principali specole di Europa, e fra quelle d'Italia non ommessa di nominare neppur la privata e Granducale di Boboli a Firenze (pag. 508 e 509), passa poi in un silenzio totale questa pubblica in Modena. E già in altra di lui notizia e descrizione dell' Osservatorio di Parigi, toccando egli delle Specole italiane, aveva parimente lasciato di comprendervi la modenese (Annuaire pour l'an 1844, pag. 377). La quale, comechè sorta invero da pochi anni e affidata per avventura alla direzione più inetta e meschina, tuttavia non è rimasta così inoperosa da non meritare di esser annoverata fra i principali Osservatorj d' Europa nel Catalogo che ne porgon ogni anno l'Effemeridi astronomiche più riputate, quelle di Berlino (per l'anno corr. a pag. 287), e il *Nautical Almanac* di Londra (pel corr. 1853 a pag. 593), da queste ul-

time citandosi anche la fonte, da cui si attinse la recata posizione della Specola modenese, che è l'effemeride di Milano pel 1829 a pagine 90 e 60 dell' Appendice (*). Nè di ciò pure io volli mover lamento verbale in Parigi al Sig. Arago, rispettando e deplorando lo stato fin d'allora infermiccio della sua salute ch'egli mi accusava, e tacitamente limitandomi ad offerirgli per l'Accademia delle scienze, di cui egli è sì degno ed eloquente segretario, un esemplare del T. I, in foglio degli Atti della mia Specola, e un volume in 4.° di parecchie mie Memorie di vario argomento astronomico. Della qual presentazione egli gentilmente onoravami, e ne faceva pubblica menzione nel rapporto alla tornata susseguente di quel primario consesso scientifico. Ma frattanto nel catalogo delle posizioni geografiche dei luoghi compilato dal Daussy, e pubblicato ogni anno, ampliato e corretto nella *Conoscenza dei tempi* di Parigi si prosegue a dare per Modena la posizione della torre *Ghirlandina*, come se qui specola non vi fosse, o in questa non fossero stati riconosciuti gli elementi di latitudine e longitudin terrestre (*Connaissance des temps* pour l'an. 1853, pag. 374).

3. Una delle moderne più importanti scoperte nell'Astronomia siderale è senza dubbio quella dei piccoli movimenti proprj delle stelle; e lo stesso Humboldt chiaramente lo dice nel Cosmos (Parte III. Dispensa 1.ª traduz. di Faye, Milano 1851 a pag. 164) colle parole « Cette découverte des mouvements propres des étoiles est de la plus haute importance pour l'astronomie physique » e ne attribuisce principalmente il merito ai lavori ammirabili di Bessel e di Ar-

(*) Si noti ancora che il *Nautical Alemanac* (pel corrente anno a pag. 591) non ammettendo fra gli Osservatorj che quelli di posizione ben determinata, per Firenze non riporta se non quello dei PP. delle Scuole Pie, detto di S. Giovannino, e tanto illustrato dal P. Inghirami.

gelander che hanno paragonato i loro propri cataloghi (di stelle) colle posizioni osservate da Bradley, verso il 1755. Ben lungi dal negare, sminuire o invidiar menomamente questo altrui titolo di giustissima gloria, io anzi pienamente ne convengo e l'applaudo; ma parmi a un tempo ch'era di eguale giustizia nell'Autore del Cosmos (Opera) il ricordare, se pur ne aveva conoscenza, il piccolo passo che io aggiunsi, il primo se non m'inganno, in questa delicata e ardua ricerca dei moti propri delle stelle, avendo io dimostrato che il moto proprio di non poche stelle, non di tutte, oltr'essere considerabile, e ben riconosciuto di quantità, è anche variabile sensibilmente nell'intervallo da mezzo a mezzo secolo circa fra l'epoche delle posizioni medie paragonate; siccome io potei rilevare al confronto delle posizioni di Bradley, ridotte da Bessel al principio del 1755, con quelle di Piazzi al principio del 1800, e di queste colle mie determinate e ridotte parte alla metà del 1840 e parte al principio del 1845. Sopra il qual argomento delle notabili variazioni secolari dei moti propri delle stelle, dall'Humboldt neppur accennato, io mi trattenni ragionando lungamente in un mio scritto (Vedi Memorie della Società italiana, T. XXIII, parte matematica, Modena 1846, dalla pag. 104 alla 131.), e poco appreso in un mio articolo pubblicato nella *Raccolta Scientifica* del Palomba (T. II. Roma, 1846 a pagine 97 e 153) mi azzardai fino a dire (pag. 156): « Vi ha quì, mi sembra chiari argomenti e indizj di un'ampia e intentata miniera di scoprimenti celesti, e sotto queste prime investigazioni celasi un grande fenomeno generale, che ne sarà, per così dire, il filone, e che servir forse potrà di guida e fondamento ai progressi dell'Astronomia siderale. »

Nè parimente mi onorava pure l'Humboldt di una semplice menzione là ov'egli discorre sopra i fenomeni e la periodicità luminosa della stella *Mira*, ossia variabile della Balena (Cosmos parte 3ª, dispensa 1ª, traduz. di Faye, Milano 1851,

pag. 144 e 270); al qual proposito egli non poteva di certo ignorare quanto io ne aveva ragionato in quattro mie lettere che videro la luce nel giornale di Schumacher intitolato *Astronomische Nachrichtem* ai numeri 345, 378, 383 e 429, colla prima di esse avendo io richiamato l'attenzione degli Astronomi sopra tale argomento e suscitatone l'interesse e la curiosità nel dotto e segace Argelander che poscia illustravalo, e ne ha meritato l'esclusiva, e più commendevole citazione dell'Humboldt. E sì che questi non è avverso a ricordar fatti e nomi, anche trattandosi di singole e imperfette osservazioni, bastandogli per avventura di saperle rammemorate dall'Arago; come ad esempio per l'apparizione singolare presso il sole in meriggio della famosa Cometa il 28 Febbrajo del 1843 (Cosmos. parte 3ª, disp. 2ª pag. 446) descritta da Arago che però saviamente soggiungeva (Annuaire pour l'an. 1844, pag. 401): « Il est vraiement très-fâcheux qu' aucun des observateurs qui *virent* la Comète de 1843 dans la journèe du 28 fèvrier, n'ait été en mesure d'en dèterminer la position exacte. »

4°. Se è lecito infine alcuna volta il rallegrare di lieve scherzo e amenità i gravi studi, io lamenterò sorridendo che Humboldt all'insaputa e per fortuita combinazione, ricercatone da Luther discopritore del vigesimo sesto Asteroide, abbia a questo imposto il nome di *Proserpina.* Qualche anno innanzi io aveva espresso il voto che tal nome venisse applicato dal cel. nostro Gasparis ad una delle sue sì frequenti e fortunate scoperte, adducendone a motivo i riguardi e le convenienze a Piazzi e a Cerere che inauguravano col principio del secolo la zona celeste de'piccoli pianeti. E nell'annunziarmi il vigesimo quarto Asteroide da sè rinvenuto lo scopritore di Napoli gentilmente dolevasi di non poter usare l'appellazione da me bramata, per aver egli dovuto prescegliere quella di *Temide.* Or conviene dire che Plutone concedendo finalmente alla moglie di raggiungere e rivedere la madre

abbiale dischiusa per maggior sollievo la porta dell'aria più fresca, e insieme la più remota dai trinacrj giardini, a farle dimenticar per avventura gl'indegni e brutali modi onde anticamente la trasse all'infernale suo talamo.

Del rimanente io non ho mosso i precedenti reclami per alcun desideriò di fama che me ne venga; nè avrei per me solo invocato ne'titoli esposti l'*unicuique suum*, nè curato pur l'eccitamento non men giusto dell'*honorem meum nemini dabo*, se non mi determinava a rompere ogni ritegno e silenzio l' onore della mia Specola e del suo augusto fondatore.

Modena, 3 Agosto 1853.

LA COMETA DI KLINKERFUES

NOTA CAMPESTRE

DEL PROFESSORE GIUSEPPE BIANCHI

In questo basso mondo tutte le cose pare che reciprocamente si compensino fra loro, il caldo e il freddo, l'asciutto e l'umido, il giorno e la notte, i mali e i beni, seguendone tutte e quasi generalizzandone il principio meccanico della reazione uguale e contraria all'azione. Così alle diuturne intemperie piovose e frigide, intorno alle quali io mi tratteneva dianzi nell'articolo delle investigazioni barometriche, da poi oltre il mezzo Giugno è succeduta in questi nostri climi una state di calore e siccità eccessivi che duran tuttora con un cielo sempre puro e con un sole vivissimo che dardeggia da mane a sera e penetra ogni fibra, distruggendo fino all'ultim'ombra e vestigio le tracce dell'opposta precedente stagione. E quel che é singolare, il vento, che dianzi spirando la tutte le direzioni era il foriero e compagno inseparabile delle meteore acquose e di nembi, ora soffiando non meno da ogni parte cospira col Sollione a disperdere fino alla più lieve nuvoletta, e sembra toglier fede all'adagio che, miete procolla

chi semina vento. Ma non è a stupire di cotai fisici mutamenti, non avendovi del vento alleato più incostante e infedele. Così ancora gli Astronomi, che non ha guari vedevansi lungamente interdetto e chiuso il campo delle loro osservazioni, ora possono a tutto loro agio percorrerlo e ricercarlo per ogni verso; e di più, quasi a indennizzarli dell'ingrato riposo dalle loro veglie e speculazioni, è venuta una Cometa di tali elementi di moto e di forma da eccitar vivamente la loro attenzione e appagare con particolar interesse la loro curiosità. È questa la Cometa scoperta nello scorso Giugno da Klinkerfues a Gottinga, che ora fa bella mostra di sè poco dopo il tramonto del Sole, e visibilissima ad occhio nudo tuttocchè avvolta nella luce del crepuscolo, come aveva presagito dalla sua epoca e distanza perielia calcolate l'Astronomo di Berlino Sig. Bruhns, cui dobbiamo l'orbita parabolica di essa determinata e successivamente corretta, e una buona effemeride de'suoi movimenti (V. il giornale *Notizie astronòmiche* al Num. 869. pag. 86, e al Num. 864. pag. 392.). Se non che tale Cometa in breve ci sarà tolta, immergendosi essa nei raggi solari e rapidamente trasportandosi verso le regioni australi. ove potrà continuarsi a vederla nelle prime ore mattutine.

Io cominciai ad osservarla regolarmente la sera del 13 Luglio e ne ho raccolto una piccola serie di posizioni che tralàscio di far conoscere, da poi che altri ne avrà potuto fornir alla scienza un maggior numero e di esattezza maggiore. Nè avran pure tardato i calcolatori a profittare del più lungo intervallo delle osservazioni estreme ed intermedia per tentare la determinazione di un'orbita ellittica soddisfacente, e quindi assegnarne colla rivoluzion periodica il ritorno del novello astro. Se non che l'arco parabolico dell'effemeride di Bruhns avendo ben corrisposto fin qui alla realtà delle osservazioni, si può quasi prevederne che l'ellisse osculatrice di quello avrà una grande eccentricità, sì che il periodo della Cometa ne risulti assai lungo.

Limitandomi in questo cenno a dire soltanto delle apparenze di forma e di splendore della Cometa, noterò che sin dai primi giorni in cui la vidi, essa mi offeriva nel cannocchiale non molto forte della mia paralattica la testa o il nucleo centrale, ben distinto eziandio nel plenilunio, però a campo non illuminato, circolare di figura, di grandezza circa eguale al disco di Urano, e di un bel colore giallo d'oro che si è sempre conservato e scorgesi ancora. Cingevasi questo di una debole e breve nebulosità biancastra, esternamente sfumata e con piccola appendice o coda in direzione opposta al sole e alquanto sparpagliata, cui ricopriva dapprincipio insieme al nucleo, e con preciso combaciamento, la barra metallica di declinazione percorsa dall'astro occultato in 12^s, 5 di tempo. Imbrunita l'aria col ritardato nascere della Luna crebbero alcun poco e successivamente le apparenze della chioma e del nucleo, non tanto però da potersi discernere ad occhio disarmato e neppur a debole illuminazione del cannocchiale fino alla sera inclusive del 4 corrente. Dopo la quale, assentatomi per alquanti giorni alla campagna, e ricondottomi a raggiunger la Cometa soltanto la sera del 17, in questa ebbi il piacere di trovar quella molto ampliata e risplendente in guisa che l'avrei forse riconosciuta a semplice vista e malgrado il chiaror della piena luna, se vagando alcune nebbie atmosferiche non me l'avesser velata e adombrata poscia, interamente. La sua chioma distendevasi allora in una lunga striscia, non molto larga, trasparente e rettilinea, rassomigliante ad un bianco pennacchio di airone, e il nucleo avea forma e colore di un piccolo arancio.

Avanzandosi l'astro e penetrando entro la sfera solare di Mercurio, io quasi mi lusingava di vederlo al suo passaggio meridiano, col favore di un limpidissimo cielo e nel grande cannocchiale di Fraunhofer al mio circolo. Ma nei giorni 22 e 23, benchè fossi certo di averlo nel campo ottico, e presso al filo orizzontale, non riuscii a discernerlo menomamente;

sì che la Cometa in questo rapporto non sostiene il confronto colla famosa del Marzo 1843 che nel suo perielio il 28 Febbrajo precedente videsi ad occhio nudo vicinissima al Sole, cui essa realmente si approssimò tanto più dell'attuale. Ora dirò invece come la sera del 23 corrente osservai la Cometa progressivamente apparire nel cannocchiale della mia paralattica a piena illuminazione crepuscolare dapprincipio del campo ottico e poscia l'aria serena più e più oscurandosi. Cominciai pertanto a distinguerla un quarto d'ora circa dopo le sette pomeridiane, presentandomi essa l'aspetto di una piccola nebulosa circolare, di una parte centrale cioè più luminosa e confusamente ravvolta da una tenue e breve atmosfera, come lume lontano e veduto attraverso fitta nebbia. Non iscorgendosi ancora traccia di coda, ciò vuol dir l'atmosfera che spandesi ed avvolge il nucleo essere più densa e riflettente la luce che non la chioma o coda, la quale difatti va illanguidandosi e sfumando all'estrema distanza dal corpo centrale. Poco a poco mi apparve anche la coda stessa e, mezz'ora circa dopo l'apparizione del nucleo, essa mi si dispiegava in tutta la sua lunghezza e magnificenza. Nel senso della larghezza vedevasi in essa una specie di ventre o rigonfiamento, simile a quello dal vento prodotto in una vela, e nel campo del cannocchiale avresti pur detto ch'essa maestosamente ondeggiasse or da un lato or dall'altro. Bianca sempre e uniforme di colore, essa mi sembrò eziandio risplendere di una parte di luce propria, o almeno, se tutta riflessa, qual si offre quella di un corpo a superficie piana e ben levigata. E già non è inverosimile, e altri per avventura ne promossero il dubbio, che al perielio la materia delle code cometiche, svoltasi per infiammazione, sia incandescente, ossia luminosa per se medesima. Frattanto io non ebbi maggiori mezzi per esplorar più oltre gli accidenti e le mutazioni d'aspetto di questa bella Cometa, la quale essendo stata osservata gran pezza innanzi e fino al suo perielio, deve aver somministrato

interressanti particolarità e avvertenze a chi abbia potuto progressivamente ispezionarla e seguirla coi grandi refrattori o telescopj, e coi polariscopj d'Arago. Attendiamone dunque le altrui relazioni, che non mancheranno di singolare fisica importanza; e speriam pure che ce ne vengan dipoi altre curiose novelle dagli osservatori nelle Specole australi che vedran la Cometa di seguito al suo passaggio perielio e al suo ricomparir il mattino fuori dei raggi solari.

Piacemi quì da ultimo richiamar a confronto colla presente la Cometa che si mostrò nel Perseo il Giugno dell'anno 1845, e di cui scrissi poche parole, pubblicate nel Vol. I della *Raccolta scientifica* del Palomba alla pagina 216. l'una e l'altra Cometa comparve in egual tempo dell'anno a rallegrar e compensare gli astronomi europei di una lunga e dirotta inclemenza di cielo preceduta. Entrambe dispiegarono grandi e leggiadre forme di nucleo e di chioma; se non che la prima di apparizione fu riconosciuta d'improvviso che vagamente brillava nel crepuscolo dell'aurora e si perdette pochi giorni appresso immersa ne'raggi del Sole a oriente ; laddove la seconda o attuale, trovata buon tratto innanzi e quand'era telescopica, è venuta crescendo fino a decorar, visibilmente ad ognuno, il sereno crepuscolo della sera, ed ora sta per abbandonare a occidente. Con poetica immagin ed espressione parevami quella somigliar alla più bella delle Dive nascente dalla candida spuma del mare; nella ricca pompa e nelle più dignitose grazie di questa io invece ravviserei la somiglianza più reale con avvenente giovine Principessa e sposa abbigliata il dì delle nozze, come sarebbe a dire la Duchessa del Brabante. Ma, dal luogo in cui scrivo prendendo concetti e paparole più semplici e naturali, se io appellava quella del Giugno 1845 la Cometa delle messi biondeggianti, amerò invece di appellar questa dell'Agosto 1853 la Cometa delle pesche mature « Intendami chi può, che m'intend'io »

Di Villa, 24 Agosto 1853.

INTORNO AD UNA EQUAZIONE DI POISSON

NOTA

DEL PROF. G. MAINARDI



Adduco una piccola prova della utilità delle formole trovate dagli illustri Geometri Abel e Plana, per trasformare in integrali definiti gli integrali a differenze finite, e che i chiar. Prof. Tortolini e Genocchi hanno migliorate, ed utilmente applicate in questi Annali (*). Poisson nella Classica Memoria su la distribuzione dell'elettrico ne' corpi conduttori (**) risolve la equazione

$$(1)\qquad f(x)-\frac{b}{k-cx}f\left(\frac{c-ax}{k-cx}\right)=h-\frac{g}{c-ax}$$

ove $f(x)$ è funzione ignota della variabile x, e le altre lettere esprimono date costanti fra le quali sussiste la sola equazione

$$ak=c^2-b^2.$$

L'illustre Geometra impiega ben molte pagine, e molti ingegnosi artifizii per conseguirne la risoluzione, la quale, col mezzo della formola del Sig. Plana, riduco a poche righe di un facilissimo calcolo.

Suppongo

$$x=u_t\,,\ \frac{c-ax}{k-cx}=u_{t+1}$$

da cui, eliminata la x, ottengo

(*) Annali di Scienze Matematiche e Fisiche del prof. Tortolini. Anni 1852—53.

(**) Istituto I. di Francia. Anno 1811.

$$(2) \qquad cu_t \,.\, u_{t+1} - ku_{t+1} - au_t + c = 0.$$

Per cavare u_t faccio $u_t = \frac{1}{v_t} - m$

$$(3) \qquad cm^2 + (a + k)m + c = 0$$

per cui

$$(a + cm)v_{t+1} + (k + cm)v_t - c = 0 \,,$$

ed indicate con m, m' le radici della (3), siccome

$$a + cm = -(k + cm')$$

avremo

$$v_{t+1} - \frac{k + cm}{k + cm'}\, v_t = \frac{c}{k + cm'} \,.$$

Supposti poi

$$\frac{k + cm}{k + cm'} = e^l \,, \quad v_t = \alpha \,.\, e^{tl} + \beta \,,$$

troviamo

$$\beta = \frac{1}{m - m'} \,, \quad v_t = \alpha e^{tl} + \frac{1}{m - m'} \,,$$

$$u_t = -\frac{m' + m(m - m')\alpha e^{tl}}{1 + \alpha(m - m')e^{tl}} \,,$$

ed abbisognandoci soltanto un integrale particolare della (2), fatto per semplicità

$$m\alpha(m - m') = -m'$$

abbiamo per ultimo

$$x = u_t = \frac{e^{tl} - 1}{m - m'e^{tl}} \,, \quad e^{tl} = \frac{1 + mx}{1 + m'x}$$

formola ideata da Poisson.

Si faccia

$$f(x) = f(u_t) = y_t \,,$$

e siccome

$$k - cx = (k + cm')\,\frac{m - m'e^{l(t+1)}}{m - m'e^{lt}}\,,$$

$$c - ax = (k + cm')\,\frac{e^{l(t+1)} - 1}{m - m'e^{lt}}\,,$$

supposti

$$\frac{y_t}{m - m'e^{tl}} = z_t\,,\quad \frac{g}{k + cm'} = \gamma\,,\quad \frac{b}{k + cm'} = \beta,$$

per cui

$$\beta = e^{\frac{1}{2}l}$$

la (1) si trasforma nella seguente

$$z_t - \beta z_{t+1} = \frac{h}{m - m'e^{tl}} - \frac{\gamma}{e^{l(t+1)} - 1}$$

$$\beta^t . z_t = \mathrm{C} + \sum\left(\frac{\gamma}{e^l . e^{tl} - 1} - \frac{h}{m - m'e^{tl}}\right)\beta^t\,.$$

dove C è generalmente una funzione arbitraria di $\operatorname{sen}2\pi t$, $\cos 2\pi t$.

Trasformato l'integrale finito in continuo, colla formola del Sig. Plana superiormente ricordata, caviamo

$$\beta^t . z_t = \mathrm{C} - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{e^l . e^{tl} - 1} - \frac{h}{m - m'e^{tl}}\right)e^{\frac{1}{2}lt}$$

$$+ \int\left(\frac{\gamma}{e^l . e^{tl} - 1} - \frac{h}{m - m'e^{tl}}\right)e^{\frac{1}{2}lt} . \, dt$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{-1}}\int_0^{\frac{1}{0}}\left\{\begin{matrix} \gamma\left[\dfrac{e^{\frac{1}{2}lu\sqrt{-1}}}{e^l . e^{lt} . e^{lu\sqrt{-1}} - 1} - \dfrac{e^{-\frac{1}{2}lu\sqrt{-1}}}{e^l . e^{lt} . e^{-lu\sqrt{-1}} - 1}\right] \\ + h\left[\dfrac{e^{\frac{1}{2}lu\sqrt{-1}}}{m'e^{lt} . e^{lu\sqrt{-1}} - m} - \dfrac{e^{-\frac{1}{2}lu\sqrt{-1}}}{m'e^{lt} . e^{-lu\sqrt{-1}} - m}\right] \end{matrix}\right\}\frac{e^{\frac{1}{2}lt} . du}{e^{2\pi u} - 1}$$

eseguita la prima integrazione, tolti gli immaginarii dal secondo integrale si ha

$$
(4)\left\{
\begin{aligned}
&z_t e^{\frac{1}{2}lt} = C + \frac{\gamma}{l e^{\frac{1}{2}}} \log \frac{e^{\frac{1}{2}l(t+1)} - 1}{e^{\frac{1}{2}l(t+1)} + 1} - \frac{h}{l} \log \frac{e^{\frac{1}{2}lt}\sqrt{m'} - \sqrt{m}}{e^{\frac{1}{2}lt}\sqrt{m'} + \sqrt{m}} \\
&- \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{e^{l}.\, e^{lt} - 1} - \frac{h}{m - m'e^{lt}}\right) e^{\frac{1}{2}lt} \\
&- 2\gamma(1 + e^{l}.\, e^{lt}) e^{\frac{1}{2}lt} \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}lu}{(e^{2\pi u} - 1)(e^{2l(t+1)} - 2e^{l(t+1)}\cos lu + 1)}\, du \\
&- 2h(m + m'e^{lt}) e^{\frac{1}{2}lt} \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}lu}{(e^{2\pi u} - 1)(m'^2 e^{2lt} - 2e^{lt}\cos lu + m^2)}\, du
\end{aligned}
\right.
$$

Se $c = a + b$, la equazione (1) corrisponde al problema di due sfere in contatto (Poisson, pag. 52), e sebbene in questo caso l'antecedente analisi non regga, pure la formola $(4)_1$ debitamente ridotta, porge il giusto risultato (Poisson pag. 234) : per trovarlo direttamente supposti $a=1$, $c=1+b$ la equazione (1) diviene

$$
(\dot{1})\left\{
\begin{aligned}
&f(x) - \frac{b}{1+2b-(1+b)x}\, f\left(\frac{1+b-x}{1+2b-(1+b)x}\right) \\
&\qquad = h - \frac{gb}{1+b-x}
\end{aligned}
\right.
$$

e la

$$
(\dot{2})\quad (1+b)(1+u_t u_{t+1}) - (1+b)(u_t + u_{t+1}) + b(u_t - u_{t+1}) = 0,
$$

e fatto

$$
u_t = 1 + \frac{1}{w_t}, \qquad w_{t+1} - w_t + \frac{1+b}{b} = 0,
$$

la quale è soddisfatta da

$$
w_t = -\frac{1+b}{b}\, t,
$$

per cui

$$x = u_t = 1 - \frac{b}{(1+b)t}\,,\quad t = \frac{b}{(1+b)(1-x)}$$

ed essendo conseguentemente

$$1 + 2b - (1+b)x = b\,\frac{1+t}{t}\,,$$

$$1 + b - x = \frac{b}{(1+b)t}\Big(1+(1+b)t\Big)\,,$$

la equazione (1), fatto

$$f(x) = f(u_t) = t y_t$$

si riduce alla

$$(3)\qquad y_t - y_{t+1} = \frac{h}{t} - \frac{g(1+b)}{1+(1+b)t}\,,$$

ossia

$$y_t = C + \sum\left(\frac{g(1+b)}{1+(1+b)t} - \frac{h}{t}\right)$$

dalla quale, col mezzo della formola del Sig. Plana, ricaviamo

$$y_t = C + g\log\Big(1+(1+b)t\Big) - h\log t - \frac{1}{2}\left(\frac{g(1+b)}{1+(1+b)t} - \frac{h}{t}\right)$$

$$+\,2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{u\,du}{e^{2\pi u}-1}\left[\frac{h}{t^2+u^2} - \frac{g(1+b)}{\Big(1+(1+b)t\Big)^2 + (1+b)^2u^2}\right]$$

Da questa equazione Poisson (pag. 234) desume altra più semplice da lui trovata a pag. 54 , la quale vien data con metodo facile e diretto dalla stessa (3).

Scriviamo quella equazione nel seguente modo

$$(4)\qquad \Delta y_t + \int_0^1\left(hu^{t-1} - g\,.\,u^{t-\frac{b}{1+b}}\right)du = 0$$

poi, seguendo Laplace, (Theor. des probabilites pag. 111) poniamo

$$y_t = \int_0^1 \varphi(u).u^t.du$$

per cui

$$\Delta y_t = \int_0^1 \varphi(u).u^t(u-1)du = 0,$$

e dalla (4)

$$\int_0^1 u^t \left((u-1)\varphi(u) + \frac{h}{u} - g.u^{-\frac{1+b}{b}}\right)du = 0$$

dunque

$$\varphi(u) = \frac{gu^{\frac{1}{1+b}} - h}{u-1},$$

e finalmente

$$y_t = C + \int_0^1 \frac{gu^{\frac{1}{1+b}} - h}{u-1}\, u^{t-1}.\, du.$$



Colgo questa occasione per rettificare una formola che ho data a pag. 596 (form. 9.) Tomo 4.° degli atti della Pontif. Accademia de' Nuovi Lincei. La formola esatta è la seguente

$$\frac{\Delta^2}{RR'} = \Delta\left(d_u d_v F - \frac{1}{F} d_u F.\ d_v F\right) - \frac{1}{4} F d_v E.d_u G$$

$$+ \frac{EG\sqrt{EG}}{F} d_u\left(\frac{F}{\sqrt{E}}\right).d_v\left(\frac{F}{\sqrt{G}}\right) - \frac{\Delta\sqrt{\Delta}}{2} d_v\left[\left(\frac{d_v E}{\sqrt{\Delta}}\right) + d_u\left(\frac{d_u G}{\sqrt{\Delta}}\right)\right]$$

da cui si desume l'analoga modificazione della formola (8), e le conseguenze dedotte non subiscono variazione. Ma ripenderó quanto prima l' argomento di quella Memoria per svilupparlo ed ampliarlo.



SULLE FORMOLE FONDAMENTALI

RISGUARDANTI LA CURVATURA DELLE SUPERFICIE E DELLE LINEE

MEMORIA

DI D. CHELINI D. S. P.

Professore di Meccanica e Idraulica
nella Pontificia Università di Bologna.

Non ostante i numerosi ed importanti lavori de' più illustri Geometri, io son d'avviso che resti ancora molto da desiderare nella teoria analitica delle superficie e delle linee, principalmente in ciò che ne risguarda i principii fondamentali. È o no erronea la mia opinione ? Prima di portarne sentenza, chiederei in grazia che si esaminasse il lavoro che or metto in luce, e che fa parte di una Memoria inedita *sui principii fondamentali della teoria analitica delle superficie e delle linee*, già annunziata in questo giornale nel giugno del 1851. Vi si vedrà risoluto con assai facilità e completamente un problema, la cui soluzione promessa, ed ancora non data, pare che in qualche parte (*) siasi giudicata non facile.

§. I. DEFINIZIONI E NOTAZIONI.

Tre assi indefiniti (x), (y), (z) traggano l'origine dal punto O, sotto un'inclinazione qualunque tra loro. Intorno al punto O come centro immaginiamo una sfera del raggio $= 1$, e sulla superficie di essa indichiamo per x , y, z i punti per ove passano gli assi positivi Ox, Oy, Oz, e lo stesso facciasi per gli altri punti. Per questa convenzione intenderemo qual

(*) Journal de Mathématiques, par M. J. Liouville, tom. XVII, décembre 1852.

sia il significato dell'equazioni :

$$H = \text{sen}(xy)\ \text{sen}(yz)\ \text{sen}(y)\ ,$$

$$H^2 = 1 - \cos^2(xy) - \cos^2(yz) - \cos^2(zx) + 2\cos(xy)\cos(yz)\cos(zx),$$

$$\cos(xy) = \cos(yz)\cos(zx) + \text{sen}(yz)\ \text{sen}(zx)\cos(z)\ ,$$

(*) $$\text{sen}(rr')\text{sen}(yz)\cos(rr', yz) = \cos(ry)\cos(r'z) - \cos(r'y)\cos(rz).$$

Sia V una funzione delle coordinate x, y, z di un punto mobile M, cioè sia

$$V = V(x, y, z).$$

A partire dal punto (x, y, z) della superficie $V = 0$, si conduca una retta t che sugli assi coordinati abbia le projezioni ortogonali

$$X = \frac{dV}{dx},\quad Y = \frac{dV}{dy},\quad Z = \frac{dV}{dz}\ ;$$

la retta t sarà normale alla superficie $V = 0$, nel punto (x, y, z), e si avrà

$$\begin{aligned} H^2t^2 = X^2\text{sen}^2(yz) & \quad \left|\ YZ\ \text{sen}(zx)\ \text{sen}(xy)\cos(x)\right. \\ + Y^2\text{sen}^2(zx) - 2 & \quad \left|\ ZX\ \text{sen}(xy)\ \text{sen}(yz)\cos(y)\right. \\ + Z^2\text{sen}^2(xy) & \quad \left|\ XY\ \text{sen}(yz)\ \text{sen}(zx)\cos(z),\right. \end{aligned}$$

dove le quantità situate dopo la linea verticale si suppongono tutte precedute dal segno e dal coefficiente che stà innanzi a detta linea, e quando il segno manca, si sottintenda il segno (+1).

(*) Si veda la Memoria *sull' uso sistematico de' principii relativi al metodo delle coordinate* (Raccolta scientifica, an. 1849). La Memoria attuale, se contiene alcun chè d'importante, dovrebbe richiamare l' attenzione de'geometri sulla precedente, che a me pare potersi ritenere, seppur l' opinion non m'inganna, qual fondamento naturale di una miglior costruzione della geometria analitica.

Per abbreviare, poniamo :

$$A = \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{dX}{dx}, \qquad A' = \frac{d^2V}{dy\,dz},$$

$$B = \frac{d^2V}{dy^2} = \frac{dY}{dy}, \qquad B' = \frac{d^2V}{dz\,dx},$$

$$C = \frac{d^2V}{dz^2} = \frac{dZ}{dz}, \qquad C' = \frac{d^2V}{dx\,dy}.$$

Denotiamo per R l'incognita di un' equazione le cui radici siano i raggi di curvatura principali della superficie $V=0$, nel punto (x, y, z), e si faccia

$$p = \frac{t}{R},$$

$$A_1 = A' - p\cos(yz), \quad B_1 = B' - p\cos(zx), \quad C_1 = C' - p\cos(xy),$$

$$\begin{array}{l|l} (p) = [(p-B)(p-C) - A_1^2]X^2 & [B_1C_1 + (p-A)A_1]YZ \\ \quad + [(p-C)(p-A) - B_1^2]Y^2 + 2 & [C_1A_1 + (p-B)B_1]ZX \\ \quad + [(p-A)(p-B) - C_1^2]Z^2 & [A_1B_1 + (p-C)C_1]XY. \end{array}$$

---

§. II. RAGGI DI CURVATURA PRINCIPALI DELLA SUPERFICIE $V = 0$.

I valori de'due raggi principali di curvatura si deducono da'due valori che prende l'incognita p nell'equazione di secondo grado

$$(p) = 0.$$

Il polinomio (p), ordinato rispetto a p, prende la forma

$$(p) = H^2 t^2 p^2 - \Pi p + \Omega;$$

dove

$$\Pi = [B + C - 2A'\cos(yz)]X^2 + [C + A - 2B'\cos(zx)]Y^2 + [A + B - 2C'\cos(xy)]Z^2$$

$$-2\left\{\begin{array}{l}[A\cos(yz) + A' - B'\cos(xy) - C'\cos(zx)]YZ\\ [B\cos(zx) + B' - C'\cos(yz) - A'\cos(xy)]ZX\\ [C\cos(xy) + C' - A'\cos(zx) - B'\cos(yz)]XY\ ;\end{array}\right.$$

$$\Omega = (BC - A'^2)X^2 + (CA - B'^2)Y^2 + (AB - C'^2)Z^2 + 2\left|\begin{array}{l}(B'C' - AA')YZ\\ (C'A' - BB')ZX\\ (A'B' - CC')XY\ .\end{array}\right.$$

Quando gli assi coordinati sono ortogonali, si avrà

$$(p) = t^2p^2 - \Pi p + \Omega\ ,$$

$$\Pi = (B + C)X^2 + (C + A)Y^2 + (A + B)Z^2 - 2\left|\begin{array}{l}A'YZ\\ B'ZX\\ C'XY\ .\end{array}\right.$$

Nella stessa ipotesi degli assi ortogonali, per $V = f(x,y) - z = 0$, ossia per $z = f(x, y)$, donde

$$\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy - dz = 0,$$

le quantità X, Y, Z, A, B, C, A′, B′, C′, diventano

$$X = \frac{dz}{dx},\quad Y = \frac{dz}{dy},\quad Z = -1\ ,\ t^2 = 1 + X^2 + Y^2$$

$$A = \frac{d^2z}{dx^2}\ ,\ B = \frac{d^2z}{dy^2},\ 0 = C = A' = B',\ C' = \frac{d^2z}{dxdy}\ ,$$

ed il polinomio (p) si muta in

$$(p) = t^2p^2 - [A(1 + Y^2) + B(1 + X^2) - 2C'XY]p + AB - C'^2\ ,$$

da cui, ponendo $v = \frac{1}{R}$, e però $p = tv$, si avrà, per determinare i valori inversi de'raggi di curvatura, la nota equazione

$$v^2 - [A(1+Y^2) + B(1+X^2) - 2C'XY]\frac{v}{t^3} + \frac{AB - C'^2}{t^4} = 0 .$$

---

§. III. CONVENZIONE NOTABILE E IDENTITA'.

Si consideri il polinomio (p), preso nella sua generalità, come funzione delle quantità:

$$p, X, Y, Z, A, B, C, A_1, B_1, C_1 .$$

Ne nasceranno più sistemi di formole, o a dir meglio di notazioni utili, di cui il primo è

$$\frac{d(p)}{dA} = -[(p-B)Z^2 + (p-C)Y^2 + 2A_1YZ],$$

$$\frac{1}{2}\frac{d(p)}{dA_1} = (p-A)YZ - X(A_1X - B_1Y - C_1Z),$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d(p)}{dX} = &[(p-B)(p-C) - A_1^2]X \\ &+ [A_1B_1 + (p-C)C_1]Y \\ &+ [C_1A_1 + (p-B)B_1]Z;\end{aligned}$$

gli altri due sistemi analoghi si deducono da questo, facendo subire simultaneamente alle quantità di ciascuno de' tre gruppi

$$(X, Y, Z), \quad (A, B, C), \quad (A_1, B_1, C_1),$$

la permutazione circolare

$$(X, Y, Z), \quad (Y, Z, X), \quad (Z, X, Y).$$

E si produce l'identità notabile

$$-\frac{d(p)}{dp}=\frac{d(p)}{dA}+\frac{d(p)}{dB}+\frac{d(p)}{dC}$$

$$+\frac{d(p)}{dA_1}\cos(yz)+\frac{d(p)}{dB_1}\cos(zx)+\frac{d(p)}{dC_1}\cos(xy)$$

non che

$$\frac{d(p)}{dA_1}=\frac{d(p)}{dA'}\ ,\ \frac{d(p)}{dB_1}=\frac{d(p)}{dB'}\ ,\ \frac{d(p)}{dC_1}=\frac{d(p)}{dC'}\ .$$

Si trova assai facilmente che l'equazione

$$(p)=0\ ,$$

combinata con quella della superficie, trae seco l'esistenza delle seguenti

$$2\frac{d(p)}{dA}\left(\frac{d(p)}{dA_1}\right)^2=2\frac{d(p)}{dB}\left(\frac{d(p)}{dB_1}\right)^2=2\frac{d(p)}{dC}\left(\frac{d(p)}{dC_1}\right)^2$$

$$=\frac{d(p)}{dA_1}\cdot\frac{d(p)}{dB_1}\cdot\frac{d(p)}{dC_1}=8\frac{d(p)}{dA}\cdot\frac{d(p)}{dB}\cdot\frac{d(p)}{dC}\ ;$$

$$\frac{d(p)}{dX}\cdot\frac{d(p)}{dA_1}=\frac{d(p)}{dY}\cdot\frac{d(p)}{dB_1}=\frac{d(p)}{dZ}\cdot\frac{d(p)}{dC_1}\ ;$$

e che fatto

$$P=(p-A)A_1+B_1C_1\ ,$$
$$P_1=(p-B)B_1+C_1A_1\ ,$$
$$P_2=(p-C)C_1+A_1B_1\ ,$$

si ha pure

$$A_1B_1C_1\left(\frac{X}{P}+\frac{Y}{P_1}+\frac{Z}{P_2}\right)^2$$

$$=\left(1+\frac{B_1C_1}{P}+\frac{C_1A_1}{P_1}+\frac{A_1B_1}{P_2}\right)\left(\frac{A_1X^2}{P}+\frac{B_1Y^2}{P_1}+\frac{C_1Z^2}{P_2}\right)\ .$$

---

§. IV. OMBELICI DELLE SUPERFICIE.

Negli ombelici delle superficie (*ombelics*), cioè ne'punti dove i raggi principali di curvatura sono eguali, sussistono, coll'equazione della superficie, i quattro sistemi di relazioni:

$$(1) \qquad p = \frac{\Pi}{2H^2 t^2} = \frac{\sqrt{\Omega}}{Ht},$$

$$(2) \qquad \frac{d(p)}{dA} = 0, \quad \frac{d(p)}{dB} = 0, \quad \frac{d(p)}{dC} = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{d(p)}{dA_1} = 0, \quad \frac{d(p)}{dB_1} = 0, \quad \frac{d(p)}{dC_1} = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{d(p)}{dX} = 0, \quad \frac{d(p)}{dY} = 0, \quad \frac{d(p)}{dZ} = 0,$$

e tre qualunque di questi sistemi sono conseguenze necessarie del quarto. Per mezzo di queste relazioni si determinano le coordinate degli ombelici delle superficie.

Per esempio, sia la superficie

$$V = \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1) = 0,$$

riferita ad assi ortogonali, e sia $A > B > C$. La $p^2 = \frac{\Omega}{(Ht)^2}$, si converte in

$$p^2 = \frac{ABC}{t^2},$$

e i tre sistemi (2), (3), (4) sono verificati dalle

$$Y = 0, \quad p - B = 0,$$

le quali, combinate con $V = 0$, danno:

$$y = 0, \quad A^2x^2 + C^2z^2 = \frac{CA}{B}, \quad Ax^2 + Cz^2 = 1;$$

e da queste si traggono le coordinate degli ombelici:

$$y = 0\,,\ z^2 = \frac{A}{BC} \cdot \frac{B - C}{A - C}\,,\quad x^2 = \frac{C}{AB} \cdot \frac{A - B}{A - C}\,.$$

Nella superficie

$$V = \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 - 2cz) = 0\,,$$

si trova

$$p^2 = \frac{ABc^2}{t^2}\,,$$

e supposto $A > B$, le coordinate degli ombelici sono :

$$y = 0\,,\quad z = \frac{c}{2AB}(A - B)\,,\quad x^2 = \frac{c^2}{A^2B}(A - B).$$

Dall'esame di queste formole risulta che « Le superficie di second'ordine dotate di ombelici sono tre : l'ellissoide, l'iperboloide a due falde, ed il paraboloide ellittico , e che ciascuna delle prime due superficie ha quattro ombelici, e due soli la terza. Il quale teorema si ottiene egualmente dalla considerazione delle sezioni circolari.

---

§. V. DIREZIONI DELLE LINEE DI CURVATURA.

Nel punto $M(x, y, z)$ della superficie $V = 0$, denotiamo per (l, m, n) la *direzione* di una qualunque delle due linee di curvatura; le quantità l, m, n si devono considerare come le componenti, secondo gli assi coordinati (x), (y), (z), di una retta $= 1$ ed avente l' accennata direzione. Si avrà per questa supposizione :

$$l^2 + m^2 + n^2 + 2[mn\cos(yz) + nl\cos(zx) + lm\cos(xy)] = 1$$

Per determinare la direzione (l, m, n), corrispondente ad una radice dell'equazione $(p) = 0$, si può impiegare uno qualunque de'cinque seguenti sistemi di formole, essendochè da

uno di essi, combinato coll'equazione della superficie, si possono derivare tutti i rimanenti; tuttavia quando si adopera il primo (1), per fissare i segni di l, m, n convien consultare qualcuno degli altri quattro.

$$(1)\qquad \frac{d(p)}{dA}\,l^{-2} = \frac{d(p)}{dB}\,m^{-2} = \frac{d(p)}{dC}\,n^{-2} = -\frac{d(p)}{dp}\,,$$

$$(2)\qquad \frac{d(p)}{dA_1}\,l = \frac{d(p)}{dB_1}\,m = \frac{d(p)}{dC_1}\,n = -2lmn\frac{d(p)}{dp}\,,$$

$$(3)\qquad 2\,\frac{d(p)}{dA}\,l^{-1} = \frac{d(p)}{dC_1}\,m^{-1} = \frac{d(p)}{dB_1}\,n^{-1}\,,$$

$$(4)\qquad \frac{d(p)}{dX}\,l^{-1} = \frac{d(p)}{dY}\,m^{-1} = \frac{d(p)}{dZ}\,n^{-1}\,,$$

$$(5)\qquad l = \frac{v - qXA_1}{(p-A)A_1 + B_1C_1}\,,\quad m = \frac{v - qYB_1}{(p-B)B_1 + C_1A_1}\,,$$

$$n = \frac{v - qZC_1}{(p-C)\,C_1 + A_1B_1}\,.$$

In quest'ultimo sistema le due quantità ausiliarie v, q si possono render note combinando le (5) con due delle seguenti

$$v = B_1C_1l + C_1A_1m + A_1B_1n\,,$$

$$1 = l^2 + m^2 + n^2 + 2\,[mn\cos(yz) + nl\cos(zx) + lm\cos(xy)],$$

$$Xl + Ym + Zn = 0\,,\quad q = \frac{d.\log.t}{ds}\,,$$

essendo ds l'elemento, nel punto M, di una delle due linee di curvatura.

Giova molto conoscere tutti questi sistemi di formole pe' quali si determina la direzione (l, m, n), giacchè non rade volte accade che alcuni di essi la lascino indeterminata sotto la forma di $\frac{0}{0}$, mentre altri la determinano completamente.

Siano $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}_1$ le radici dell'equazione $(p)=0$, talchè risulti

$$(p)=H^2t^2(p-\tilde{\omega})(p-\tilde{\omega}_1).$$

sarà

$$\frac{d(p)}{dp}=H^2\,t^2(2p-\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_1)\,,$$

e per conseguente :

$$\frac{d(\tilde{\omega})}{dp}=H^2t^2(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_1)\,,\quad \frac{d(\tilde{\omega}_1)}{d\tilde{\omega}_1}=H^2t^2(\tilde{\omega}_1-\tilde{\omega})\ .$$

Quindi, ove le direzioni delle linee di curvatura corrispondenti alle radici $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}_1$ si designino per (λ, μ, ν), $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, avremo :

$$\frac{d(\tilde{\omega})}{dA}\lambda^{-2}=\frac{d(\tilde{\omega})}{dB}\mu^{-2}=\frac{d(\tilde{\omega})}{dC}\nu^{-2}=-H^2t^2(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_1)\,,$$

$$\frac{d(\tilde{\omega}_1)}{dA}\lambda_1^{-2}=\frac{d(\tilde{\omega}_1)}{dB}\mu_1^{-2}=\frac{d(\tilde{\omega}_1)}{dC}\nu_1^{-2}=H^2t^2(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_1)\ .$$

---

§. VI. FORMOLE RELATIVE ALLA TRASFORMAZIONE DI TRE VARIABILI, FUNZIONI DI TRE ALTRE VARIABILI.

Siano tre quantità ρ, ρ_1, ρ_2 funzioni delle tre variabili x, y, z, cioè sia :

$$\text{(A)}\quad \rho=\rho(x,y,z)\,,\quad \rho_1=\rho_1(x,y,z)\,,\quad \rho_2=\rho_2(x,y,z)\,;$$

ciascuna delle seconde quantità si potrà pur considerare, generalmente parlando, come funzione delle tre prime, cioè potrà porsi :

$$x=x(\rho,\rho_1,\rho_2)\,,\quad y=y(\rho,\rho_1,\rho_2)\,,\quad z=z(\rho,\rho_1,\rho_2)\,,$$

e dalla differenzazione si avrà

$$(a)\quad\left\{\begin{aligned} d\rho &= \frac{d\rho}{dx}dx + \frac{d\rho}{dy}dy + \frac{d\rho}{dz}dz,\\ d\rho_1 &= \frac{d\rho_1}{dx}dx + \frac{d\rho_1}{dy}dy + \frac{d\rho_1}{dz}dz,\\ d\rho_2 &= \frac{d\rho_2}{dx}dx + \frac{d\rho_2}{dy}dy + \frac{d\rho_2}{dz}dz; \end{aligned}\right.$$

$$(\alpha)\quad\left\{\begin{aligned} dx &= \frac{dx}{d\rho}d\rho + \frac{dx}{d\rho_1}d\rho_1 + \frac{dx}{d\rho_2}d\rho_2,\\ dy &= \frac{dy}{d\rho}d\rho + \frac{dy}{d\rho_1}d\rho_1 + \frac{dy}{d\rho_2}d\rho_2,\\ dz &= \frac{dz}{d\rho}d\rho + \frac{dz}{d\rho_1}d\rho_1 + \frac{dz}{d\rho_2}d\rho_2. \end{aligned}\right.$$

Si rappresentino per D, Δ i *determinanti* formati rispettivamente dai coefficienti differenziali di dx, dy, dz nelle (a), e dai coefficienti di $d\rho$, $d\rho_1$, $d\rho_2$ nelle (α). Fra i due determinanti D, Δ sussiste la relazione nota:

$$D\Delta = 1 .$$

Se dalle (a) si ricavino i valori di dx, dy, dz, e si paragonino con quelli delle (α); e se poscia dalle (α) si ricavino i valori di $d\rho$, $d\rho_1$, $d\rho_2$, e si paragonino con quelli delle (a); si otterranno due gruppi composti ciascuno di tre sistemi di equazioni, de'quali sono tipo rispettivo i seguenti:

$$(b)\quad\left\{\begin{aligned} D\frac{dx}{d\rho} &= \frac{d\rho_1}{dy}\cdot\frac{d\rho_2}{dz} - \frac{d\rho_1}{dz}\cdot\frac{d\rho_2}{dy},\\ D\frac{dy}{d\rho} &= \frac{d\rho_1}{dz}\cdot\frac{d\rho_2}{dx} - \frac{d\rho_1}{dx}\cdot\frac{d\rho_2}{dz},\\ D\frac{dz}{d\rho} &= \frac{d\rho_1}{dx}\cdot\frac{d\rho_2}{dy} - \frac{d\rho_1}{dy}\cdot\frac{d\rho_2}{dx}; \end{aligned}\right.$$

$$(\beta)\left\{\begin{aligned}
\Delta\frac{d\rho}{dx}&=\frac{dy}{d\rho_1}\cdot\frac{dz}{d\rho_2}-\frac{dy}{d\rho_2}\cdot\frac{dz}{d\rho_1}\,,\\
\Delta\frac{d\rho_1}{dx}&=\frac{dy}{d\rho_2}\cdot\frac{dz}{d\rho}-\frac{dy}{d\rho}\cdot\frac{dz}{d\rho_2}\,,\\
\Delta\frac{d\rho_2}{dx}&=\frac{dy}{d\rho}\cdot\frac{dz}{d\rho_1}-\frac{dy}{d\rho_1}\cdot\frac{dz}{d\rho}\,.
\end{aligned}\right.$$

Da ciascuno di questi sistemi si generano gli altri due analoghi, facendo subire la permutazione circolare alle sole lettere (ρ, ρ_1, ρ_2) nel primo (b), ed alle sole lettere (x, y, z) nel secondo (β).

Si notino i due sistemi d'identità del tipo:

$$(c)\qquad \frac{d}{dx}\left(D\,\frac{dx}{d\rho}\right)+\frac{d}{dy}\left(D\,\frac{dy}{d\rho}\right)+\frac{d}{dz}\left(D\,\frac{dz}{d\rho}\right)=0\,,$$

$$(\gamma)\qquad \frac{d}{d\rho}\left(\Delta\,\frac{d\rho}{dx}\right)+\frac{d}{d\rho_1}\left(\Delta\,\frac{d\rho_1}{dx}\right)+\frac{d}{d\rho_2}\left(\Delta\,\frac{d\rho_2}{dx}\right)=0\,,$$

le quali si verificano intuitivamente sostituendo alle quantità tra parentesi i binomii delle (b), (β), e poi osservando, nell'atto della differenzazione, che ad ogni termine ne corrisponde sempre un'eguale e contrario.

---

§. VII. SUPERFICIE CONJUGATE IN SISTEMA TRIPLO, E FORMOLE PER LA TRASFORMAZIONE DELLE COORDINATE RETTILINEE IN COORDINATE CURVILINEE.

Supponiamo ora che le variabili x, y, z rappresentino le coordinate rettilinee di un punto M mobile nello spazio, e cerchiamo le principali conseguenze di questa supposizione.

Dati i valori delle coordinate x, y, z, relative ad una posizione qualunque del punto M, l'equazioni (A), che indicherò per (ρ), (ρ_1), (ρ_2), faranno conoscere i valori corrispondenti

delle quantità ρ, ρ_1, ρ_2, chiamate *parametri* dal sig. Lamè; e se, rimanendo fissi i valori di questi parametri, supponiamo variabili le coordinate x, y, z, l' equazioni (A) rappresenteranno tre superficie che si segheranno nel punto M.

Le tre superficie (ρ), (ρ_1), (ρ_2) si diranno *conjugate in sistema obliquo* od *in sistema ortogonale*, secondochè si segheranno in ogni punto dello spazio, o sotto angoli qualunque che possono variare da un punto all'altro, o sotto angoli costantemente retti. Cominciamo dal supporle *conjugate in sistema obliquo.*

A partire dal punto M le tre linee d'intersezione di queste superficie formano in qualche modo *tre assi coordinati curvi* di cui il punto considerato M è l'*origine.* Per fissare le idee, denotiamo questi assi curvi colle lettere σ, σ_1, σ_2, e per guisa che l'asse σ sia la intersezione delle superficie (ρ_1) e (ρ_2); l'asse σ_1 sia l'intersezione delle (ρ_2) e (ρ); e l' asse σ_2 sia l'intersezione delle (ρ) e (ρ_1). Per questa convenzione le tre superficie conjugate (ρ), (ρ_1), (ρ_2) si potranno pure rappresentare, a partire da un punto dato M, coi simboli $\sigma_1 \sigma_2$, $\sigma_2\sigma$, $\sigma \sigma_1$.

Passando da un punto all'altro degli assi curvi $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$, è evidente che il parametro di ciascuna delle tre superficie non varia che sull'asse curvo rappresentante la linea d'intersezione delle altre due, rimanendo costante allorchè si cammina sopra ciascuno degli altri due assi curvi. Così quando a partire da M si passa da un punto all'altro dell' asse σ, la sola superficie (ρ) varia di posizione e di forma, variando il valore del suo parametro ρ, mentre rimangono costanti, insieme coi loro parametri, le altre due superficie (ρ_1), (ρ_2).

Si noti che per la trasformazione delle coordinate x, y, z, in altre coordinate rettilinee, non subiscono alterazione veruna nè i valori de' parametri ρ, ρ_1, ρ_2 relativi a un dato punto, nè per conseguenza tutte le quantità che siano funzioni di essi parametri.

Supposti *rettangolari gli assi primitivi* Ox, Oy, Oz, immaginiamo tre nuovi assi rettilinei Mx', My', Mz' tangenti nel punto M agli assi curvi σ, σ_1, σ_2, ed esca da M, sotto una direzione qualunque, una linea infinitesima ds, la quale abbia secondo gli assi Ox, Oy, Oz le componenti dx, dy, dz, e secondo gli assi Mx', My', Mz' le componenti dx', dy', dz'. Si avrà

$$\begin{array}{rl} ds^2 = dx'^2 & dy'dz'\cos(y'z') \\ + dy'^2 + 2 & dz'dx'\cos(z'x') \\ + dz'^2 & dx'dy'\cos(x'y')\,, \end{array}$$

ed insieme $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, la quale per le ($\alpha$) si muta in

$$\begin{array}{rl} ds^2 = a d\rho^2 & a'd\rho_1 d\rho_2 \\ + b d\rho^2_1 + 2 & b'd\rho_2 d\rho \\ + c d\rho^2_2 & c'd\rho\, d\rho_1\,, \end{array}$$

ponendo per abbreviare

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} a &= \left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\rho}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2 \,, \\ b &= \left(\frac{dx}{d\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\rho_1}\right)^2 \,, \\ c &= \left(\frac{dx}{d\rho_2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\rho_2}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\rho_2}\right)^2 \,, \end{aligned} \right.$$

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} a' &= \frac{dx}{d\rho_1}\cdot\frac{dx}{d\rho_2} + \frac{dy}{d\rho_1}\cdot\frac{dy}{d\rho_2} + \frac{dz}{d\rho_1}\cdot\frac{dz}{d\rho_2} \,, \\ b' &= \frac{dx}{d\rho_2}\cdot\frac{dx}{d\rho} + \frac{dy}{d\rho_2}\cdot\frac{dy}{d\rho} + \frac{dz}{d\rho_2}\cdot\frac{dz}{d\rho} \,, \\ c' &= \frac{dx}{d\rho}\cdot\frac{dx}{d\rho_1} + \frac{dy}{d\rho}\cdot\frac{dy}{d\rho_1} + \frac{dz}{d\rho}\cdot\frac{dz}{d\rho_1} \,. \end{aligned} \right.$$

Quando ds prende la direzione dell'asse Mx', si avrà da una parte d$y'=0$, d$z'=0$, e dall'altra d$\rho_1=0$, d$\rho_2=0$, e per conseguenza d$x'=$d$\rho\sqrt{a}$. Se adunque concepiamo che ds prenda successivamente la direzione de'tre assi Mx', My', Mz', conchiuderemo primieramente

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{lll} dx' = d\rho\sqrt{a}\,, & dy' = d\rho_1\sqrt{b}\,, & dz' = d\rho_2\sqrt{c}\,, \\ d\rho = \dfrac{dx'}{\sqrt{a}}\,, & d\rho_1 = \dfrac{dy'}{\sqrt{b}}\,, & d\rho_2 = \dfrac{dz'}{\sqrt{c}}\,; \end{array} \right.$$

ed in secondo luogo:

$$(4)\qquad a'=\sqrt{bc}.\cos(y'z'),\ b'=\sqrt{ca}.\cos(z'x')\,,\ c'=\sqrt{ab}.\cos(x'y')\,;$$

donde

$$(5)\ bc-a'^2=bc\,\mathrm{sen}^2(y'z'),\ ca-b'^2=ca\,\mathrm{sen}^2(z'x'),\ ab-c'^2=ab\,\mathrm{sen}^2(x'y');$$

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} b'c'-aa'=a\sqrt{bc}.\,[\cos(z'x')\cos(x'y')-\cos(y'z')]\,, \\ c'a'-bb'=b\sqrt{ca}.\,[\cos(x'y')\cos(y'z')-\cos(z'x')]\,, \\ a'b'-cc'=c\sqrt{ab}.\,[\cos(y'z')\cos(z'x')-\cos(x'y')]\,; \end{array} \right.$$

$$(7)\qquad \Delta^2 = abc + 2a'b'c' - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2\,.$$

Quest'ultima relazione si dimostra osservando che il determinante $\Delta = \Sigma \pm \frac{dx}{d\rho}\cdot\frac{dy}{d\rho_1}\cdot\frac{dz}{d\rho_2}$, essendo eguale a (*)

$$\sqrt{(abc)}.\mathrm{sen}(x'y')\,\mathrm{sen}(y'z')\mathrm{sen}(y')\,,$$

(*) *Sull'uso sistematico de'principii* etc. Convien però avvertire che la retta $=\sqrt{a}$, avente secondo gli assi Ox, Oy, Oz le componenti $\frac{dx}{d\rho}$, $\frac{dy}{d\rho}$, $\frac{dz}{d\rho}$, ha la direzione positiva dell' asse Mx', come apparisce dalle (17) e (17)'. E lo stesso dee dirsi delle rette $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, parallele agli assi My', Mz'.

sarà

$$\Delta^2 = abc\,[1 - \cos^2(x'y') - \cos^2(y'z') - \cos^2(z'x') + 2\cos(x'y')\cos(y'z')\cos(z'x')\,],$$

la quale, sostituiti i valori de'coseni, è identica alla precedente. Intanto, fatto qui

$$H = \text{sen}(x'y')\,\text{sen}(y'z')\,\text{sen}(y'),$$

si avverta la formola:

$$(8)\qquad \Delta^2 = abcH^2 .$$

Consideriamo le proprietà delle sei quantità

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma'$$

determinate dall'equazioni:

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha\Delta^2 &= bc - a'^2, \\ \beta\Delta^2 &= ca - b'^2, \\ \gamma\Delta^2 &= ab - c'^2, \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} \alpha'\Delta^2 &= b'c' - aa', \\ \beta'\Delta^2 &= c'a' - bb', \\ \gamma'\Delta^2 &= a'b' - cc'. \end{aligned}\right.$$

Da queste si ricavano, siccome equivalenti ad identità, le:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} a &= (\beta\gamma - \alpha'^2)\Delta^2, \\ b &= (\gamma\alpha - \beta'^2)\Delta^2, \\ c &= (\alpha\beta - \gamma'^2)\Delta^2; \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} a' &= (\beta'\gamma' - \alpha\alpha')\Delta^2, \\ b' &= (\gamma'\alpha' - \beta\beta')\Delta^2, \\ c' &= (\alpha'\beta' - \gamma\gamma')\Delta^2; \end{aligned}\right.$$

per le quali si determinano le quantità a, b, c, a', b', c' in funzione delle α, β, γ, α', β', γ'.

E ne sorgono le relazioni:

$$(11)\quad \alpha = \frac{\text{sen}^2(y'z')}{aH^2},\ \beta = \frac{\text{sen}^2(z'x')}{bH^2},\ \gamma = \frac{\text{sen}^2(x'y')}{cH^2}$$

$$(12)\begin{cases} \alpha' = -\dfrac{\text{sen}(z'x')\,\text{sen}(x'y')\cos(x')}{H^2\sqrt{bc}} = -\sqrt{\beta\gamma}.\cos(x'), \\ \beta' = -\dfrac{\text{sen}(x'y')\,\text{sen}(y'z')\cos(y')}{H^2\sqrt{ca}} = -\sqrt{\gamma\alpha}.\cos(y'), \\ \gamma' = -\dfrac{\text{sen}(y'z')\,\text{sen}(z'x')\cos(z')}{H^2\sqrt{ab}} = -\sqrt{\alpha\beta}.\cos(z'). \end{cases}$$

Se nell'espressione

$$(a\alpha + b'\beta' + c'\gamma')\Delta^2,$$

si sostituiscono i valori di α, β', γ', essa si muta in

$$abc + 2a'b'c' - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2 = \Delta^2,$$

e se si sostituiscono i valori di a, b', c', si muta in

$$(\alpha\beta\gamma + 2\alpha'\beta'\gamma' - \alpha\alpha'^2 - \beta\beta'^2 - \gamma\gamma'^2)\Delta^4;$$

dunque

$$(13)\quad \alpha\beta\gamma + 2\alpha'\beta'\gamma' - \alpha\alpha'^2 - \beta\beta'^2 - \gamma\gamma'^2 = \Delta^{-2} = D^2.$$

Si notino pure le identità:

$$a\alpha + b'\beta' + c'\gamma' = 1,\quad 0 = a\beta' + b'\gamma + c'\alpha' = a\gamma' + b'\alpha' + c'\beta.$$

Le (a) ed (α) del §. VI, a causa delle (3)', si possono mettere sotto la forma:

$$(a')\begin{cases} dx' = \sqrt{a}\left(\dfrac{d\rho}{dx}dx + \dfrac{d\rho}{dy}dy + \dfrac{d\rho}{dz}dz\right), \\ dy' = \sqrt{b}\left(\dfrac{d\rho_1}{dx}dx + \dfrac{d\rho_1}{dy}dy + \dfrac{d\rho_1}{dz}dz\right), \\ dz' = \sqrt{c}\left(\dfrac{d\rho_2}{dx}dx + \dfrac{d\rho_2}{dy}dy + \dfrac{d\rho_2}{dz}dz\right); \end{cases}$$

$$(\alpha')\left\{\begin{aligned} dx &= \frac{dx}{d\rho}\cdot\frac{dx'}{\sqrt{a}}+\frac{dx}{d\rho_1}\cdot\frac{dy'}{\sqrt{b}}+\frac{dx}{d\rho_2}\cdot\frac{dz'}{\sqrt{c}}\,, \\ dy &= \frac{dy}{d\rho}\cdot\frac{dx'}{\sqrt{a}}+\frac{dy}{d\rho_1}\cdot\frac{dy'}{\sqrt{b}}+\frac{dy}{d\rho_2}\cdot\frac{dz'}{\sqrt{c}}\,, \\ dz &= \frac{dz}{d\rho}\cdot\frac{dx'}{\sqrt{a}}+\frac{dz}{d\rho_1}\cdot\frac{dy'}{\sqrt{b}}+\frac{dz}{d\rho_2}\cdot\frac{dz'}{\sqrt{c}}\,. \end{aligned}\right.$$

Ora siano

$$(l,\ m,\ n),\ (l',\ m',\ n'),\ (l'',\ m'',\ n'')$$

le direzioni positive degli assi primitivi Ox, Oy, Oz rispetto ai nuovi assi Mx', My', Mz', e siano

$$(\lambda,\ \mu,\ \nu),\quad (\lambda',\ \mu',\ \nu'),\quad (\lambda'',\ \mu'',\ \nu'')$$

le direzioni positive di questi rispetto a quelli. Ove si abbia riguardo al significato geometrico de'coefficienti nelle formole relative alla trasformazione delle coordinate rettilinee, significato da me posto in chiaro nella Memoria più volte citata (*Dell'uso sistematico* etc.), avremo dalle (α') ;

$$(14)\qquad l=\frac{d\rho}{dx}\sqrt{a}\,,\quad m=\frac{d\rho_1}{dx}\sqrt{b}\,,\quad n=\frac{d\rho_2}{dx}\sqrt{c}\,,$$

ed $(l',\ m',\ n')$, $(l'',\ m'',\ n'')$ saranno ciò che diventano le l, m, n quando alla x si sostituisce la y e la z.

Essendo l, m, n le componenti, secondo i nuovi assi Mx', My', Mz', di una retta $=1$ ed avente la direzione positiva dell'asse Ox, si ha dalla teoria delle projezioni (*Mem. cit.*)

$$(14)'\quad l=\frac{\text{sen}(y'z',\ x)}{\text{sen}(y'z',\ x')},\ m=\frac{\text{sen}(z'x',\ x)}{\text{sen}(z'x',\ y')},\ n=\frac{\text{sen}(x'y',\ x)}{\text{sen}(x'y',\ z')}\ .$$

E giova notare che nelle :

$$l=\frac{\text{sen}(y'z',\ x)}{\text{sen}(y'z',\ x')}\,,\ l'=\frac{\text{sen}(y'z',\ y)}{\text{sen}(y'z',\ x')}\,,\ l''=\frac{\text{sen}(y'z',\ z)}{\text{sen}(y'z',\ x')}\,,$$

i numeratori equivalgono ai coseni degli angoli che una retta perpendicolare al piano $(y'z')$ forma co' tre assi rettangolari Ox, Oy, Oz, e che però abbiamo:

$$l^2 + l'^2 + l''^2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(y'z', x')} \; ;$$

donde, essendo

$$\operatorname{sen}(y'z', x') = \frac{H}{\operatorname{sen}(y'z')} \; ,$$

conchiuderemo la prima delle tre seguenti, e dalla prima le altre due, sostituendo alle (l, l', l''), le (m, m', m''), (n, n', n''), ossia sostituendo alla ρ la ρ_1 e la ρ_2.

$$(15) \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 = \alpha \; , \\ &\left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_1}{dz}\right)^2 = \beta \; ; \\ &\left(\frac{d\rho_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_2}{dz}\right)^2 = \gamma \; . \end{aligned} \right.$$

Mirando al significato di que'numeratori, si trova pure

$$mn + m'n' + m''n'' = -\frac{\operatorname{sen}(z'x')\operatorname{sen}(x'y')\cos(x')}{H^2} \; ,$$

e quindi

$$(16) \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\rho_1}{dx}\cdot\frac{d\rho_2}{dx} + \frac{d\rho_1}{dy}\cdot\frac{d\rho_2}{dy} + \frac{d\rho_1}{dz}\cdot\frac{d\rho_2}{dz} = \alpha' \; , \\ &\frac{d\rho_2}{dx}\cdot\frac{d\rho}{dx} + \frac{d\rho_2}{dy}\cdot\frac{d\rho}{dy} + \frac{d\rho_2}{dz}\cdot\frac{d\rho}{dz} = \beta' \; , \\ &\frac{d\rho}{dx}\cdot\frac{d\rho_1}{dx} + \frac{d\rho}{dy}\cdot\frac{d\rho_1}{dy} + \frac{d\rho}{dz}\cdot\frac{d\rho_1}{dz} = \gamma' \; . \end{aligned} \right.$$

In secondo luogo, dal significato geometrico de'coefficienti nelle (α') raccoglieremo :

$$(17)\quad \lambda = \frac{dx}{d\rho} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}\ , \quad \mu = \frac{dy}{d\rho} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}\ , \quad \nu = \frac{dz}{d\rho} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}},$$

e le (λ', μ', ν'), $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ saranno ciò che diventano le λ, μ, ν quando alle (ρ, a) si sostituiscono le (ρ_1, b) e le (ρ_2, c).

Essendo λ, μ, ν le componenti secondo i primi assi Ox, Oy, Oz, di una retta $= 1$ ed avente la direzione positiva dell'asse Mx', si ha

$$(17)'\qquad \lambda = \cos(xx'),\ \mu = \cos(yx'),\ \nu = \cos(zx').$$

Qui cade in acconcio di fare un'osservazione, leggera in apparenza ma non senza importanza per le sue conseguenze, ed è che, essendo

$$\lambda = \cos(xx'),\qquad \lambda' = \cos(xy'),\qquad \lambda'' = \cos(xz'),$$

cioè essendo λ, λ', λ'' i coseni degli angoli che l' asse positivo Ox fa cogli assi Mx', My', Mz', *una retta* $= 1$ *ed avente la direzione positiva dell'asse* Ox, *avrà secondo i nuovi assi* Mx', My', Mz' *e le componenti* l, m, n, *e le projezioni ortogonali* λ, λ', λ''. E la stessa osservazione si può ripetere rispetto agli assi Oy ed Oz.

Posto siffatto principio, dalle formole per le quali, date le componenti di una retta, si determinano le projezioni e viceversa, avremo (*Mem. cit.*) rispetto all'asse Mx' :

$$\lambda = l + m\cos(x'y') + n\cos(z'x'),$$

$$H^2 l = \text{sen}(y'z')[\lambda\,\text{sen}(y'z') - \lambda'\,\text{sen}(z'x')\cos(z') - \lambda''\,\text{sen}(x'y')\cos(y')].$$

Da queste e dal principio di simmetria nascono due gruppi d' equazioni composti ciascuno di tre sistemi, de'quali sono

tipo rispettivo i seguenti :

$$
(18)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{dx}{d\rho} &= a\,\frac{d\rho}{dx} + c'\,\frac{d\rho_1}{dx} + b'\,\frac{d\rho_2}{dx}\,,\\
\frac{dx}{d\rho_1} &= b\,\frac{d\rho_1}{dx} + a'\,\frac{d\rho_2}{dx} + c'\,\frac{d\rho}{dx}\,,\\
\frac{dx}{d\rho_2} &= c\,\frac{d\rho_2}{dx} + b'\,\frac{d\rho}{dx} + a'\,\frac{d\rho_1}{dx}\,;
\end{aligned}\right.
$$

$$
(19)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dx} &= \alpha\,\frac{dx}{d\rho} + \gamma'\,\frac{dx}{d\rho_1} + \beta'\,\frac{dx}{d\rho_2}\,,\\
\frac{d\rho_1}{dx} &= \beta\,\frac{dx}{d\rho_1} + \alpha'\,\frac{dx}{d\rho_2} + \gamma'\,\frac{dx}{d\rho}\,,\\
\frac{d\rho_2}{dx} &= \gamma\,\frac{dx}{d\rho_2} + \beta'\,\frac{dx}{d\rho} + \alpha'\,\frac{dx}{d\rho_1}\,;
\end{aligned}\right.
$$

Da ciascuno di questi sistemi si generano gli altri due analoghi, facendo subire la permutazione circolare alle sole lettere (x, y, z).

I sistemi (18) e (19) si possono scriver così :

$$
(20)\quad\left\{\begin{aligned}
\lambda\sqrt{a} &= a.\frac{l}{\sqrt{a}} + c'.\frac{m}{\sqrt{b}} + b'.\frac{n}{\sqrt{c}}\,,\\
\lambda'\sqrt{b} &= b.\frac{m}{\sqrt{b}} + a'.\frac{n}{\sqrt{c}} + c'.\frac{l}{\sqrt{a}}\,,\\
\lambda''\sqrt{c} &= c.\frac{n}{\sqrt{c}} + b'.\frac{l}{\sqrt{a}} + a'.\frac{m}{\sqrt{b}}\,;
\end{aligned}\right.
$$

$$(21)\quad\begin{cases}\dfrac{l}{\sqrt{a}} = \alpha.\lambda\sqrt{a} + \gamma'.\lambda'\sqrt{b} + \beta'.\lambda''\sqrt{c}\,, \\[2ex] \dfrac{m}{\sqrt{b}} = \beta.\lambda'\sqrt{b} + \alpha'.\lambda''\sqrt{c} + \gamma'.\lambda\sqrt{a}\,, \\[2ex] \dfrac{n}{\sqrt{c}} = \gamma.\lambda''\sqrt{c} + \beta'.\lambda\sqrt{a} + \alpha'.\lambda'\sqrt{b}\,.\end{cases}$$

È palese che in questi due sistemi di formole le quantità (l, m, n), $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ si possono, se vogliasi, riguardare come le componenti e le projezioni, secondo gli assi Mx', My', Mz', di una retta di grandezza e direzione arbitraria, e che perciò trovasi così risoluto il problema : *Date, rispetto ai nuovi assi* Mx', My', Mz', *le componenti o le projezioni di una retta, determinarne le projezioni o le componenti.*

Se si richiama la formola per la quale, date le projezioni ortogonali di due rette e, f sopra tre assi coordinati, si determina il coseno dell' angolo di queste due rette , e se in essa si suppone che i tre assi coordinati siano Mx', My', ed ed un terzo asse perpendicolare a questi due, si troverà :

$$\text{sen}^2(x'y')\cos(ef) = \text{sen}^2(x'y')\,\text{sen}(x'y',e)\,\text{sen}(x'y',f)$$
$$+\begin{matrix}\cos(x'e)\cos(x'f)\\ +\cos(y'e)\cos(y'f)\end{matrix} - \cos(x'y')\left|\begin{matrix}\cos(x'e)\cos(y'f)\\ \cos(x'f)\cos(y'e)\end{matrix}\right.$$

donde

$$(22)\quad \text{sen}^2(x'y')\,\text{sen}(x'y',e)\,\text{sen}(x'y',f) = \text{sen}^2(x'y')\cos(ef)$$
$$-\begin{Bmatrix}\cos(x'e)\cos(x'f)\\ \cos(y'e)\cos(y'f)\end{Bmatrix} + \cos(x'y')\begin{Bmatrix}\cos(x'e)\cos(y'f)\\ \cos(x'f)\cos(y'e)\end{Bmatrix}$$

formola che ci offrirà in appresso un mezzo facile e rapido di trasformazione.

---

§. VIII. ALTRE FORMOLE DI TRASFORMAZIONE RELATIVE AI COEFFICIENTI DIFFERENZIALI DELLE COORDINATE x, y, z, DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO.

Siano e, f, g tre rette, la prima delle quali abbia, seconde gli assi Ox, Oy, Oz, le componenti:

$$\frac{d^2x}{d\rho^2}, \frac{d^2y}{d\rho^2}, \frac{d^2z}{d\rho^2},$$

e le altre due f e g siano ciò che diviene la e quando a ρ si sostituisce ρ_1 e ρ_2.

Similmente, siano e', f', g' tre nuove rette la prima delle quali abbia, secondo gli assi Ox, Oy, Oz, le componenti:

$$\frac{d^2x}{d\rho_1 d\rho_2}, \frac{d^2y}{d\rho_1 d\rho_2}, \frac{d^2z}{d\rho_1 d\rho_2},$$

e le altre due f' e g' siano ciò che diviene la e' quando alle lettere ρ, ρ_1, ρ_2 si fa subire la permutazione circolare.

Dal prender le derivate dell'equazioni (1) e (2) del §. precedente VII, si deducono rispetto alle e, f, g, tre sistemi di equazioni, il primo de'quali é

$$\frac{1}{2}\frac{da}{d\rho} = \frac{dx}{d\rho}\cdot\frac{d^2x}{d\rho^2} + \frac{dy}{d\rho}\cdot\frac{d^2y}{d\rho^2} + \frac{dz}{d\rho}\cdot\frac{d^2z}{d\rho^2},$$

$$\frac{dc'}{d\rho} - \frac{1}{2}\frac{da}{d\rho_1} = \frac{dx}{d\rho_1}\cdot\frac{d^2x}{d\rho^2} + \frac{dy}{d\rho_1}\cdot\frac{d^2y}{d\rho^2} + \frac{dz}{d\rho_1}\cdot\frac{d^2z}{d\rho^2},$$

$$\frac{db'}{d\rho} - \frac{1}{2}\frac{da}{d\rho_2} = \frac{dx}{d\rho_2}\cdot\frac{d^2x}{d\rho^2} + \frac{dy}{d\rho_2}\cdot\frac{d^2y}{d\rho^2} + \frac{dz}{d\rho_2}\cdot\frac{d^2z}{d\rho^2};$$

e si ottengono gli altri due sistemi, facendo subire simultaneamente a ciascuno de'tre gruppi $(a,\ b,\ c)$, $(a',\ b',\ c')$, $(\rho,\ \rho_1,\ \rho_2)$ la solita permutazione circolare.

Rispetto alle e', f', g', si deducono egualmente dalle (1) e (2) del §. VII, tre sistemi di equazioni, il primo de'quali è:

$$\frac{db'}{d\rho_1}+\frac{dc'}{d\rho_2}-\frac{da'}{d\rho}=2\left(\frac{dx}{d\rho}\cdot\frac{d^2x}{d\rho_1 d\rho^2}+\frac{dy}{d\rho}\cdot\frac{d^2y}{d\rho_1 d\rho_2}+\frac{dz}{d\rho}\cdot\frac{d^2z}{d\rho_1 d\rho_2}\right),$$

$$\frac{db}{d\rho_2}=2\left(\frac{dx}{d\rho_1}\cdot\frac{d^2x}{d\rho_1 d\rho_2}+\frac{dy}{d\rho_1}\cdot\frac{d^2y}{d\rho_1 d\rho_2}+\frac{dz}{d\rho_1}\cdot\frac{d^2z}{d\rho_1 d\rho_2}\right),$$

$$\frac{dc}{d\rho_1}=2\left(\frac{dx}{d\rho_2}\cdot\frac{d^2x}{d\rho_1 d\rho_2}+\frac{dy}{d\rho_2}\cdot\frac{d^2y}{d\rho_1 d\rho_2}+\frac{dz}{d\rho_2}\cdot\frac{d^2z}{d\rho_1 d\rho_2}\right).$$

Qui si osservi che la retta $=\sqrt{a}$, avente secondo gli assi rettangolari Ox, Oy, Oz le componenti $\frac{dx}{d\rho}$, $\frac{dy}{d\rho}$, $\frac{dz}{d\rho}$, ha la direzione positiva, come apparisce dalle (17), dell'asse Mx'. In egual modo si dimostra che le rette rappresentate da $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, hanno la direzione positiva degli assi My', Mz'. Ciò posto, richiamando il noto significato geometrico de' secondi membri dell'equazioni precedenti, raccoglieremo primieramente il sistema:

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned} e\sqrt{a}.\cos(x'e) &= \frac{1}{2}\,\frac{da}{d\rho}, \\ e\sqrt{b}.\cos(y'e) &= \frac{dc'}{d\rho}-\frac{1}{2}\,\frac{da}{d\rho_1}, \\ e\sqrt{c}.\cos(z'e) &= \frac{db'}{d\rho}-\frac{1}{2}\,\frac{da}{d\rho_2}, \end{aligned}\right.$$

cogli altri due analoghi che si generano facendo subire *simultaneamente* la permutazione circolare alle quantità di ciascuno de'cinque gruppi (e, f, g), (a, b, c), (x', y', z'), (a', b', c'), (ρ, ρ_1, ρ_2).

Raccoglieremo in secondo luogo il sistema :

$$(2)\quad\begin{cases} 2e'\sqrt{a}.\cos(x'e') = \dfrac{db'}{d\rho_1}+\dfrac{dc'}{d\rho_2}-\dfrac{da'}{d\rho}\,, \\ 2e'\sqrt{b}.\cos(y'e') = \dfrac{db}{d\rho_2}\,, \\ 2e'\sqrt{c}.\cos(z'e') = \dfrac{dc}{d\rho_2}\,, \end{cases}$$

cogli altri due analoghi che si generano come precedentemente.

E finalmente raccoglieremo il sistema :

$$(3)\quad\begin{cases} fg\cos(fg) - e'^2 = \dfrac{d^2a'}{d\rho_1 d\rho_2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d^2b}{d\rho^2_1}+\dfrac{d^2c}{d\rho^2_2}\right), \\ ge\cos(ge) - f'^2 = \dfrac{d^2b'}{d\rho_2 d\rho} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d^2c}{d\rho^2_2}+\dfrac{d^2a}{d\rho^2}\right), \\ ef\cos(ef) - g'^2 = \dfrac{d^2c'}{d\rho d\rho_1} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d^2a}{d\rho^2}+\dfrac{d^2b}{d\rho^2_1}\right). \end{cases}$$

Si avverta che conoscendo dalle (1) e (2), in funzione di a, b, c, a', b', c' e delle loro derivate prime, le projezioni ortogonali di ciascuna delle sei rette (e, f, g), (e', f', g') sopra i tre assi Mx', My', Mz', potremo determinare, quando ci aggradi, mediante le note regole (V. *Sull' uso* ec.) il valore di ciascuna delle medesime rette, ed i coseni degli angoli che esse formano sia cogli assi Mx', My', Mz', sia tra loro.

È poi facile a vedere che lo stesso metodo si potrebbe estendere alle rette che sugli assi Ox, Oy, Oz hanno per projezioni le derivate analoghe delle x, y, z, di un ordine superiore al secondo e prese rispetto a ρ, ρ_1, ρ_2. Ed in que-

ste formole si possono discernere gli elementi per la determinazione di ciò che si riferisce alla curvatura sia delle linee d'intersezione delle tre superficie conjugate (ρ), (ρ_1), (ρ_2), sia di una linea qualsivoglia.

---

§. IX. FORMOLE DI TRASFORMAZIONE RELATIVE AI COEFFICIENTI DIFFERENZIALI DI UNA FUNZIONE DI TRE VARIABILI.

Riprendiamo presentemente la

$$V = V(x, y, z) = V(\rho, \rho_1, \rho_2),$$

che differenziata produce :

$$dV = \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz$$

$$= \frac{dV}{d\rho} \cdot \frac{dx'}{\sqrt{a}} + \frac{dV}{d\rho_1} \cdot \frac{dy'}{\sqrt{b}} + \frac{dV}{d\rho_2} \cdot \frac{dz'}{\sqrt{c}} \, .$$

Da quest'equazione e dalle note proprietà delle projezioni si deduce che la retta t, che sugli assi Ox, Oy, Oz ha le projezioni

$$\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz},$$

e che, come fu avvertito, è normale nel punto M alla superficie $V = 0$, avrà sui nuovi assi Mx', My', Mz' , le projezioni

$$\frac{dV}{dx'} = \frac{dV}{d\rho} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \, , \, \frac{dV}{dy'} = \frac{dV}{d\rho} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} \, , \, \frac{dV}{dz'} = \frac{dV}{d\rho_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \, .$$

Quindi la formola per la quale, date le projezioni di una retta sopra tre assi, si determina la retta , darà subito t^2, ossia :

$$(1)\quad \left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2=\alpha\left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2+\beta\left(\frac{dV}{d\rho_1}\right)^2+\gamma\left(\frac{dV}{d\rho_2}\right)^2+2\left|\begin{array}{l}\alpha'\ \dfrac{dV}{d\rho_1}\cdot\dfrac{dV}{d\rho_2}\\ \beta'\ \dfrac{dV}{d\rho_2}\cdot\dfrac{dV}{d\rho}\\ \gamma'\ \dfrac{dV}{d\rho}\cdot\dfrac{dV}{d\rho_1}\end{array}\right. .$$

Inoltre, se si rappresentano per

$$L\sqrt{a},\qquad M\sqrt{b},\quad N\sqrt{c},$$

le componenti secondo gli assi Mx', My', Mz' della retta t, avremo dalle (21) del §. VII

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} L=\alpha\dfrac{dV}{d\rho}+\gamma'\dfrac{dV}{d\rho_1}+\beta'\dfrac{dV}{d\rho_2}\,,\\[2ex] M=\beta\dfrac{dV}{d\rho_1}+\alpha'\dfrac{dV}{d\rho_2}+\gamma'\dfrac{dV}{d\rho}\,,\\[2ex] N=\gamma\dfrac{dV}{d\rho_2}+\beta'\dfrac{dV}{d\rho}+\alpha'\dfrac{dV}{d\rho_1}\,; \end{array}\right.$$

e se la retta t si projetta insieme alle sue componenti $L\sqrt{a}$, $M\sqrt{b}$, $N\sqrt{c}$, sugli assi primitivi Ox, Oy, Oz, e si badi alle (17) e (17)', si avrà :

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dV}{dx}=L\dfrac{dx}{d\rho}+M\dfrac{dx}{d\rho_1}+N\dfrac{dx}{d\rho_2}\,,\\[2ex] \dfrac{dV}{dy}=L\dfrac{dy}{d\rho}+M\dfrac{dy}{d\rho_1}+N\dfrac{dy}{d\rho_2}\,,\\[2ex] \dfrac{dV}{dz}=L\dfrac{dz}{d\rho}+M\dfrac{dz}{d\rho_1}+N\dfrac{dz}{d\rho_2}\,. \end{array}\right.$$

La derivata della prima di quest'equazioni, presa rispetto ad x, ove si ricordi essere $D\Delta = 1$, si può scrivere evidentemente così :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = D\frac{d}{dx}(\Delta L).\frac{dx}{d\rho} + \Delta L\frac{d}{dx}\left(D\frac{dx}{d\rho}\right)$$

$$+ D\frac{d}{dx}(\Delta M).\frac{dx}{d\rho_1} + \Delta M\frac{d}{dx}\left(D\frac{dx}{d\rho_1}\right)$$

$$+ D\frac{d}{dx}(\Delta N).\frac{dx}{d\rho_2} + \Delta N\frac{d}{dx}\left(D\frac{dx}{d\rho_2}\right).$$

Formando in simil guisa le altre due derivate $\frac{d^2V}{dy^2}$, $\frac{d^2V}{dz^2}$, col cangiare la x in y, ed in z, e poi sommandole colla prima, ove si abbia riguardo al principio espresso dalla formola

$$\frac{dV}{d\rho} = \frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{d\rho} + \frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{d\rho} + \frac{dV}{dz}\cdot\frac{dz}{d\rho},$$

non che alle (c) del § VI e delle sue analoghe, si ottiene:

$$(4)\qquad \left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}\right)\Delta = \frac{d}{d\rho}(\Delta L) + \frac{d}{d\rho_1}(\Delta M) + \frac{d}{d\rho_2}(\Delta N),$$

formola importante che Jacobi ha dimostrato per mezzo del calcolo delle variazioni, e che è una generalizzazione di quella già data dal Sig. Lamé nella supposizione di un sistema di superficie conjugate ortogonali. Nel qual caso, avendosi :

$$0 = a' = b' = c' = \alpha' = \beta' = \gamma',$$

$$\Delta^2 = abc, \quad \alpha = \frac{bc}{\Delta^2}, \quad \beta = \frac{ca}{\Delta^2}, \quad \gamma = \frac{ab}{\Delta^2},$$

risulta

$$(5)\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)\sqrt{abc}\\&=\frac{d}{d\rho}\left(\frac{dV}{d\rho}\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)+\frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{dV}{d\rho_1}\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)+\frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{dV}{d\rho_2}\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)\end{aligned}\right.$$

---

§. X. FORMOLE DI TRASFORMAZIONE RELATIVE ALLA CURVATURA DELLE SUPERFICIE.

Differenziando di nuovo la $dV=0$, cioè la

$$\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{dz}dz=0\,,$$

nasce

$$\frac{dV}{dx}d^2x+\frac{dV}{dy}d^2y+\frac{dV}{dz}d^2z=-\left[dx\,d\left(\frac{dV}{dx}\right)+dy\,d\left(\frac{dV}{dy}\right)+dz\,d\left(\frac{dV}{dz}\right)\right]$$

dove il primo membro si può scrivere sotto la forma:

$$(T)\qquad ds\left(\frac{dV}{dx}\cdot d\,\frac{dx}{ds}+\frac{dV}{dy}\cdot d\,\frac{dy}{ds}+\frac{dV}{dz}\cdot d\,\frac{dz}{ds}\right)\,.$$

Ora se nella superficie $V=0$ consideriamo una curva qualunque (c) che nel punto $M(x, y, z)$ passi per l'elemento ds, e di cui R sia il raggio di curvatura, si dimostra facilmente (*) che le

$$d\,\frac{dx}{ds},\quad d\,\frac{dy}{ds},\quad d\,\frac{dz}{ds}$$

rappresentano, secondo gli assi Ox, Oy, Oz, le componenti di una linea $=\frac{ds}{R}$, misura dell'angolo di contingenza, e la

---

(*) Vedi la Memoria sulla curvatura delle linee e delle superficie nella Raccolta scientifica, an. 1848.

cui direzione è parallela a quella del raggio R contato dal punto M verso il centro di curvatura.

Ciò posto, dal significato geometrico del trinomio (T) si conchiude

$$\frac{ds^2}{R}\cos(tR)=\frac{dV}{dx}d^2x+\frac{dV}{dy}d^2y+\frac{dV}{dz}d^2z$$

$$=-\left[dxd\left(\frac{dV}{dx}\right)+dyd\left(\frac{dV}{dy}\right)+dzd\left(\frac{dV}{dz}\right)\right];$$

e poichè in quest'equazione quando il piano osculatore della curva (c) gira intorno all'elemento ds, l'ultimo trinomio non cangia di valore, così non cangerà di valore neppure il primo membro: ciò che costituisce il teorema di Meusnier. Potremo dunque supporre che il piano osculatore della curva (c) sia normale, nel punto M, alla superficie (V), nel qual caso si ha

$$\frac{\cos(tR)}{R}=\pm\frac{1}{R},$$

prendendo il secondo membro col segno positivo o col negativo, secondochè la normale t della superficie nel punto M è o no diretta, come il raggio R, verso il centro di curvatura.

Adottiamo l'ipotesi che t sia diretta in senso contrario di R contato dal punto di contatto verso il centro, o ciò che torna lo stesso, nel medesimo senso di R contato dal centro di curvatura verso il punto di contatto, e cerchiamo di trasformar l'equazione

$$(1)\qquad \frac{dV}{dx}d^2x+\frac{dV}{dy}d^2y+\frac{dV}{dz}d^2z=-t\frac{ds^2}{R}$$

in un'altra che dipenda solamente dalle nove quantità

$$a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c',\ \frac{dV}{d\rho},\ \frac{dV}{d\rho_1},\ \frac{dV}{d\rho_2},$$

e loro differenziali, presi rispetto a ρ, ρ_1, ρ_2.

Osserviamo dapprima che quando sulla superficie (V) si passa da un punto ad un altro di una data curva (c), convien riguardare le quantità ρ, ρ_1, ρ_2 come funzioni ciascuna di una stessa variabile indipendente, e che per conseguenza dal differenziare la

$$dx = \frac{dx}{d\rho}d\rho + \frac{dx}{d\rho_1}d\rho_1 + \frac{dx}{d\rho_2}d\rho_2,$$

viene

$$(2)\quad d^2x = \begin{array}{l|l|l} \frac{dx}{d\rho}d^2\rho & \frac{d^2x}{d\rho^2}d\rho^2 & \frac{d^2x}{d\rho_1 d\rho_2}d\rho_1 d\rho_2 \\ +\frac{dx}{d\rho_1}d^2\rho_1 \ + & \frac{d^2x}{d\rho^2_1}d\rho^2_1 \ +2 & \frac{d^2x}{d\rho_2 d\rho}d\rho_2 d\rho \\ +\frac{dx}{d\rho_2}d^2\rho_2 & \frac{d^2x}{d\rho^2_2}d\rho^2_2 & \frac{d^2x}{d\rho\, d\rho_1}d\rho d\rho_1 . \end{array}$$

Mutiamo qui la x in y e in z, e poi sostituiamo i valori di d^2x, d^2y, d^2z nella (1). Ove si facciano le riduzioni del tipo:

$$\frac{dV}{dx}\cdot\frac{d^2x}{d\rho^2}+\frac{dV}{dy}\cdot\frac{d^2y}{d\rho^2}+\frac{dV}{dz}\cdot\frac{d^2z}{d\rho^2} = te\cos(te),$$

$$\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{d\rho}+\frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{d\rho}+\frac{dV}{dz}\cdot\frac{dz}{d\rho}=\frac{dV}{d\rho},$$

la (1) si convertirà nella

$$-t\frac{ds^2}{R}=\begin{array}{l}\dfrac{dV}{d\rho}d^2\rho\\[2ex]+\dfrac{dV}{d\rho_1}d^2\rho_1\\[2ex]+\dfrac{dV}{d\rho_2}d^2\rho_2\end{array}+t\left|\begin{array}{l}e\cos(te).d\rho^2\\[2ex]f\cos(tf).d\rho^2_1\\[2ex]g\cos(tg).d\rho^2_2\end{array}\right.+2t\left|\begin{array}{l}e'\cos(te').d\rho_1\,d\rho_2\\[2ex]f'\cos(tf').d\rho_2 d\rho\\[2ex]g'\cos(tg').d\rho d\rho_1\,,\end{array}\right.$$

e siccome dalla

$$\frac{dV}{d\rho}d\rho+\frac{dV}{d\rho_1}d\rho_1+\frac{dV}{d\rho_2}d\rho_2=0\,,$$

si trae differenziando ,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dV}{d\rho}d^2\rho\\[2ex]+\dfrac{dV}{d\rho_1}d^2\rho_1\\[2ex]+\dfrac{dV}{d\rho_2}d^2\rho_2\end{array}\right|=-\left|\begin{array}{l}\dfrac{d^2V}{d\rho^2}d\rho^2\\[2ex]\dfrac{d^2V}{d\rho_1^2}d\rho^2_1\\[2ex]\dfrac{d^2V}{d\rho^2_2}d\rho^2_2\end{array}\right.-2\left|\begin{array}{l}\dfrac{d^2V}{d\rho_1 d\rho_2}d\rho_1 d\rho_2\\[2ex]\dfrac{d^2V}{d\rho_2 d\rho}d\rho_2 d\rho\\[2ex]\dfrac{d^2V}{d\rho d\rho_1}d\rho d\rho_1\,,\end{array}\right.$$

così avremo finalmente

$$(3)\qquad t\frac{ds^2}{R}=\left|\begin{array}{l}\left(\dfrac{d^2V}{d\rho^2}-et\cos(te)\right)d\rho^2\\[2ex]\left(\dfrac{d^2V}{d\rho^2_1}-ft\cos(tf)\right)d\rho^2_1\\[2ex]\left(\dfrac{d^2V}{d\rho^2_2}-gt\cos(tg)\right)d\rho^2_2\end{array}\right.+2\left|\begin{array}{l}\left(\dfrac{d^2V}{d\rho_1 d\rho_2}-e't\cos(te')\right)d\rho_1 d\rho_2\\[2ex]\left(\dfrac{d^2V}{d\rho_2\,d\rho}-f't\cos(tf')\right)d\rho_2\,d\rho\\[2ex]\left(\dfrac{d^2V}{d\rho\,d\rho_1}-g't\cos(tg')\right)d\rho d\rho_1.\end{array}\right.$$

Si osservi che ciascuno de'sei prodotti analoghi ad $et\cos(te)$

si può esprimere immediatamente in funzione di quelle nove quantità. Infatti rispetto ai nuovi assi Mx', My', Mz', noi conosciamo le componenti di t, espresse da

$$L\sqrt{a}\,,\quad M\sqrt{b}\,,\quad N\sqrt{c}\,,$$

(Vedi le (2) del §. IX) e le projezioni di e, espresse da

$$e\cos(x'e),\quad e\cos(y'e)\,,\quad e\cos(z'e)$$

(Vedi le (1) e (2) del §. VIII). Or dal principio che « *una retta moltiplicata per la projezione che riceve da un'altra sulla propria direzione, é uguale alla somma delle componenti dell' una moltiplicate rispettivamente per la projezione che ricevon dall'altra sulla propria direzione* » dedurremo sei equazioni analoghe alla :

$$(4)\qquad et\cos(te)=Le\sqrt{a}\cos(x'e)+Me\sqrt{b}\cos(y'e)+Ne\sqrt{c}\cos(z'e).$$

Rimane così risoluto il problema proposto.

Il problema di determinare in funzione delle quantità a, b, c, a', b', c', $\frac{dV}{d\rho}$, $\frac{dV}{d\rho_1}$, $\frac{dV}{d\rho_2}$ e loro derivate, sia i *raggi di curvatura principali*, sia *la direzione delle linee di curvatura*, si riconduce immediatamente a quello già risoluto nella supposizione degli assi obliqui, come risulta da ciò che segue.

Se nella superficie $V=0$, si concepiscono trasformate le coordinate rettangole x, y, z nelle coordinate oblique x', y', z', prese sugli assi Mx', My', Mz' tangenti nel punto M alle intersezioni delle superficie (ρ), (ρ_1), (ρ_2), si avrà

$$t\frac{ds^2}{R} = dx'd\left(\frac{dV}{dx'}\right) + dy'd\left(\frac{dV}{dy'}\right) + dz'd\left(\frac{dV}{dz'}\right)$$

$$= \frac{d^2V}{dx'^2}dx'^2 + \frac{d^2V}{dy'^2}dy'^2 + \frac{d^2V}{dz'^2}dz'^2 + 2\left|\begin{array}{l} \frac{d^2V}{dy'dz'}dy'dz' \\ \frac{d^2V}{dz'dx'}dz'dx' \\ \frac{d^2V}{dx'dy'}dx'dy' \end{array}\right. ,$$

e quest'equazione dovrà riuscire identica a ciò che diventa la (3) quando vi si è sostituito

$$d\rho = \frac{dx'}{\sqrt{a}}, \quad d\rho_1 = \frac{dy'}{\sqrt{b}}, \quad d\rho_2 = \frac{dz'}{\sqrt{c}}.$$

Pertanto il nostro problema sarà evidentemente risoluto, se nelle formole riportate in principio, e che lo risolvono nel caso degli assi obliqui, supporremo che questi assi obliqui siano gli stessi assi Mx', My', Mz', e prenderemo

$$\left\{\begin{array}{l}
X = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{dV}{d\rho}, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{dV}{d\rho_1}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{c}}\frac{dV}{d\rho_2}, \\
A = \frac{1}{a}\left[\frac{d^2V}{d\rho^2} - et\cos(et)\right], \quad A' = \frac{1}{\sqrt{bc}}\left[\frac{d^2V}{d\rho_1 d\rho_2} - e't\cos(e't)\right], \\
B = \frac{1}{b}\left[\frac{d^2V}{d\rho_1^2} - ft\cos(ft)\right], \quad B' = \frac{1}{\sqrt{ca}}\left[\frac{d^2V}{d\rho_2 d\rho} - f't\cos(f't)\right], \\
C = \frac{1}{c}\left[\frac{d^2V}{d\rho_2^2} - gt\cos(gt)\right], \quad C' = \frac{1}{\sqrt{ab}}\left[\frac{d^2V}{d\rho\, d\rho_1} - g't\cos(g't)\right].
\end{array}\right.$$

Per esempio, la superficie $V = 0$ sia una delle tre su-

perficie (ρ), (ρ_1), (ρ_2), ed in particolare sia

$$V = \rho_2(x, y, z) = 0.$$

Sarà :

$$d\rho_2 = \frac{dz'}{\sqrt{c}} = 0,$$

e per conseguente :

$$0 = X = Y, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{c}}, \quad t^2 = \gamma;$$

$$A = -\frac{et\cos(et)}{a}, \quad B = -\frac{ft\cos(ft)}{b}, \quad C = -\frac{gt\cos(gt)}{c},$$

$$A' = -\frac{e't\cos(e't)}{\sqrt{bc}}, \quad B' = -\frac{f't\cos(f't)}{\sqrt{ca}}, \quad C' = -\frac{g't\cos(g't)}{\sqrt{ab}},$$

e la (3) si muterà nella

$$(5) \qquad A dx'^2 + B dy'^2 + 2C' dx' dy' = t\frac{ds^2}{R},$$

equivalente alla :

$$et\cos(et).d\rho^2 + ft\cos(ft).d\rho^2_1 + 2g't\cos(g't).d\rho d\rho_1 = -t\frac{ds^2}{R}.$$

Inoltre le (2) del §. IX daranno:

$$L = \beta', \qquad M = \alpha', \qquad N = \gamma,$$

essendo

$$\gamma = \frac{ab - c'^2}{\Delta^2}, \quad \alpha' = \frac{b'c' - aa'}{\Delta^2}, \quad \beta' = \frac{c'a' - bb'}{\Delta^2},$$

$$\Delta^2 = abc + 2a'b'c' - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2.$$

Quindi, ponendo mente alle formole del tipo (4) :

$$et\cos(et) = Le\sqrt{a}\cos(x'e) + Me\sqrt{b}\cos(y'e) + Ne\sqrt{c}\cos(z'e)$$
$$= \gamma e\sqrt{c}\cos(z'e) + \beta' e\sqrt{a}\cos(x'e) + \alpha' e\sqrt{b}\cos(y'e),$$

e richiamando le (1) e (2) del §. VIII, si conchiuderà :

$$(6)\begin{cases} -\mathrm{A}a=\gamma\left(\frac{\mathrm{d}b'}{\mathrm{d}\rho}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\rho_2}\right)+\frac{1}{2}\beta'\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\rho}+\alpha'\left(\frac{\mathrm{d}c'}{\mathrm{d}\rho}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\rho_1}\right) \\ -\mathrm{B}b=\gamma\left(\frac{\mathrm{d}a'}{\mathrm{d}\rho_1}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\rho_2}\right)+\beta'\left(\frac{\mathrm{d}c'}{\mathrm{d}\rho_1}-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\rho}\right)+\frac{1}{2}\alpha'\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\rho_1} \\ -2\mathrm{C}'\sqrt{ab}=\gamma\left(\frac{\mathrm{d}a'}{\mathrm{d}\rho}+\frac{\mathrm{d}b'}{\mathrm{d}\rho_1}-\frac{\mathrm{d}c'}{\mathrm{d}\rho_2}\right)+\beta'\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\rho_1}+\alpha'\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\rho}\,. \end{cases}$$

Queste tre relazioni concordano pienamente con quelle pubblicate dal Sig. Liouville, e intorno a cui si è occupato ultimamente il Sig. Brioschi. Ma la formola (5) e la (7) che verrà in appresso, dalle quali sembrano aver tratto partito que'due geometri, erano state già da me pubblicate, con altre denominazioni, nel giornale arcadico tom. CXV. anno 1848.

L'equazione generale (p) del §. II, per la quale si determinano *i raggi di curvatura principali*, nel nostro caso diviene:

$$\mathrm{H}^2t^2p^2-[\mathrm{A}+\mathrm{B}-2\mathrm{C}'\cos(xy)]\frac{p}{c}+\frac{\mathrm{AB}-\mathrm{C}'^2}{c}=0\,,$$

dove $p=\frac{t}{\mathrm{R}}$, essendo R l' incognita di cui i due valori rappresentano i raggi di curvatura principali.

Per semplificare si omette qui di scrivere gli apici su' nuovi assi $\mathrm{M}x'$, $\mathrm{M}y'$, $\mathrm{M}z'$.

Il polinomio (p) del §. I, se prima di svilupparlo vi si fa $\mathrm{X}=0$, $\mathrm{Y}=0$, invece dell'ultima equazione produrrà :

$$(p-\mathrm{A})(p-\mathrm{B})-\mathrm{C}^2{}_1=0\,,$$

ossia :

$$(7)\quad p^2\mathrm{sen}^2(xy)-[\mathrm{A}+\mathrm{B}-2\mathrm{C}'\cos(xy)]\,p+\mathrm{AB}-\mathrm{C}'^2=0\,,$$

ed è facile a provare che questa concide colla precedente.

Le *direzioni delle due linee di curvatura* nel punto M, riferite ai due assi Mx', My', e corrispondenti alle radici $\bar\omega$, $\bar\omega_1$ della (7), si determinano per le formole (1) e (3) del §. V:

$$2\frac{d(p)}{dA}l^{-1}=\frac{d(p)}{dC_1}m^{-1};\quad \frac{d(p)}{dA}l^{-2}=\frac{d(p)}{dB}m^{-2}=-\frac{d(p)}{dp},$$

le quali si riducono alle:

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{l}{p-B}=\frac{m}{C'-p\cos(xy)};\\&\frac{l^2}{p-B}=\frac{m^2}{p-A}=\frac{1}{(2p-\bar\omega-\omega_1)\,\mathrm{sen}^2(xy)};\end{aligned}\right.$$

dove

$$\mathrm{sen}^2(xy)=\frac{ab-c'^2}{ab},\quad \cos(xy)=\frac{c'}{\sqrt{ab}}.$$

Dimostrazione di una formola di Gauss. Denotiamo per R, R_1 i due raggi principali di curvatura; avremo dalla (7)

$$(9)\qquad \frac{AB-C'^2}{t^2\,\mathrm{sen}^2(xy)}=\frac{1}{RR_1}.$$

Ma

$$\frac{AB}{t^2\,\mathrm{sen}^2(xy)}=\frac{ef\cos(et)\cos(ft)}{ab\,\mathrm{sen}^2(xy)}$$

$$=\frac{abef\,\mathrm{sen}^2(xy)\,\mathrm{sen}(xy,e)\,\mathrm{sen}(xy,f)}{(ab-c'^2)^2};$$

e si trova in egual modo:

$$\frac{C'^2}{t^2\,\mathrm{sen}^2(xy)}=\frac{abg'^2\,\mathrm{sen}^2(xy)\,\mathrm{sen}^2(xy,g')}{(ab-c'^2)^2}.$$

Ora, per dar simmetria e semplicità al risultato, denotiamo

per E la retta che sugli assi Mx', My', Mz' ha le projezioni:

$$e\sqrt{a}\cos(xe)\,,\quad e\sqrt{b}\cos(ye)\,,\quad e\sqrt{c}\cos(zc)\,,$$

e per E_x, E_y, E_z queste projezioni medesime; e siano F, G ciò che diventa E quando nella sua espressione ad e si sostituisce f e g'. Ciò posto, la formola (22) del §. VII, ove si moltiplichi per $abef$ o poi vi si facciano le sostituzioni precedenti, dà subito:

$$\frac{AB}{t^2 \operatorname{sen}^2(xy)}=\frac{(ab-c'^2)ef\cos(ef)-b\,E_xF_x-aE_yF_y+c'(E_xF_y+E_yF_x)}{(ab-c'^2)^2}$$

e questa, facendo $e=f=g'$, produce:

$$\frac{C'^2}{t^2\operatorname{sen}^2(xy)}=\frac{(ab-c'^2)g'^2-bG^2{}_x-aG^2{}_y+2c'G_xG_y}{(ab-c'^2)^2}\,,$$

onde è che dalla (9) si deriva la relazione:

$$\frac{(ab-c'^2)^2}{RR_1}=(ab-c'^2)\Big(ef\cos(ef)-g'^2\Big)+b(G^2{}_x-E_xF_x)$$
$$+a(G^2{}_y-E_yF_y)+c'(E_xF_y+E_yF_x-2G_xG_y)\,,$$

la quale è la celebre formola di Gauss, scoperta dopo una serie così fatta di calcoli che un chiaro geometra non ha dubitato di chiamarli penosi (*très pénibles*) (*). In questa formola, essendosi già trovato:

$$\begin{cases}E_x=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{da}{d\rho}\,,\\[2ex] E_y=\dfrac{dc'}{d\rho}-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{da}{d\rho_1}\,,\end{cases}\quad \begin{cases}F_x=\dfrac{dc'}{d\rho_1}-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{db}{d\rho}\,,\\[2ex] F_y=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{db}{d\rho_1}\,,\end{cases}\quad \begin{cases}G_x=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{da}{d\rho_1}\,,\\[2ex] G_y=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{db}{d\rho}\,,\end{cases}$$

(*) Liouville, journal, tom. XII, pag. 293.

(Vedi le (1), (2), e (3) del §. VIII), si devono fare le seguenti sostituzioni:

$$ef\cos(ef) - g'^2 = \frac{d^2c'}{d\rho\, d\rho_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{d^2a}{d\rho^2} + \frac{d^2b}{d\rho^2_1}\right),$$

$$G^2_x - E_x F_x = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{da}{d\rho_1}\right)^2 + \frac{da}{d\rho}\left(\frac{db}{d\rho} - 2\frac{dc'}{d\rho_1}\right)\right],$$

$$G^2_y - E_y F_y = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{db}{d\rho}\right)^2 + \frac{db}{d\rho_1}\left(\frac{da}{d\rho_1} - 2\frac{dc'}{d\rho}\right)\right],$$

$$E_x F_y + E_y F_x - 2G_x G_y$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{da}{d\rho}\cdot\frac{db}{d\rho_1} - \frac{da}{d\rho_1}\cdot\frac{db}{d\rho} - 2\frac{da}{d\rho_1}\cdot\frac{dc'}{d\rho_1} - 2\frac{db}{d\rho}\cdot\frac{dc'}{d\rho} + 4\frac{dc'}{d\rho}\cdot\frac{dc'}{d\rho_1}\right].$$

---

§. XI. SUPERFICIE CONJUGATE IN SISTEMA ORTOGONALE.

Raggi principali, e direzioni delle linee di curvatura.

Supponiamo che le tre superficie (ρ), (ρ_1), (ρ_2) si seghino in ogni punto dello spazio ad angolo retto, e che però si abbia

$$0 = a' = b' = c'.$$

Le (7) e (9) del §. VII diventano

$$\Delta^2 = abc\,,\quad a\alpha = 1\,,\quad b\beta = 1\,,\quad c\gamma = 1\,,$$
$$0 = \alpha' = \beta' = \gamma'\,.$$

Per la superficie (ρ_2) le (6) del §. X danno

$$Aa = \frac{\gamma}{2}\,\frac{da}{d\rho_2}\,,\quad Bb = \frac{\gamma}{2}\,\frac{db}{d\rho_2}\,,\quad C' = 0\,,$$

donde

$$A = \frac{1}{2c} \frac{d \log a}{d\rho_2}, \quad B = \frac{1}{2c} \frac{d \log b}{d\rho_2};$$

e la (7) dello stesso §. X riducesi a

$$(p - A)(p - B) = 0,$$

e ci dice che i valori inversi de'due raggi principali di curvatura, relativi al punto M della superficie (ρ_2), sono dati da

$$\frac{A}{\sqrt{\gamma}} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \cdot \frac{d \log a}{d\rho_2}, \quad \frac{B}{\sqrt{\gamma}} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \frac{d \log b}{d\rho_2}.$$

Le direzioni delle due linee di curvatura relative al punto M della stessa superficie (ρ_2), si deducono dalla (8), cioè dalla

$$\frac{l^2}{p - B} = \frac{m^2}{p - A} = \frac{1}{2p - A - B};$$

e si conchiude che le direzioni corrispondenti alle due radici $p = A$, $p = B$, sono rispettivamente

$$(l = \pm 1, m = 0), \quad (l = 0, m = \pm 1),$$

cioè sono le direzioni medesime che nel punto M hanno le linee d'intersezione σ, σ_1 della superficie (ρ_2) colle due superficie (ρ_1), e (ρ). Si ottiene così il teorema del Sig. Dupin. » Nelle superficie conjugate in sistema ortogonale le linee di curvatura dell'una sono le linee d'intersezione che vi producono le altre due.

Intanto si noti che in un punto qualunque M dello spazio, i valori inversi de' raggi di curvatura delle tre superficie (ρ_2), (ρ), (ρ_1), conjugate in tal punto, sono espressi rispettivamente per

$$
(R)\left\{
\begin{array}{l}
\left(\frac{1}{2\sqrt{c}}\cdot\frac{d\log a}{d\rho_2}\,,\;\frac{1}{2\sqrt{c}}\cdot\frac{d\log b}{d\rho_2}\right),\\
\left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot\frac{d\log b}{d\rho}\,,\;\frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot\frac{d\log c}{d\rho}\right),\\
\left(\frac{1}{2\sqrt{b}}\cdot\frac{d\log c}{d\rho_1}\,,\;\frac{1}{2\sqrt{b}}\cdot\frac{d\log a}{d\rho_1}\right).
\end{array}
\right.
$$

Relazione tra le derivate delle coordinate rettilinee x, y, z, e le derivate delle coordinate curvilinee ρ, ρ_1, ρ_2.

Non si può entrare in quest'argomento, senza profittare dell'opera importante del Sig. Lamé sulle coordinate curvilinee (*). Qui il mio scopo principale si è di arrivare per una via più breve e più facile a ricordarsi, alle due leggi memorabili scoperte dal Sig. Lamé, e che esprimono la maniera onde variano le curvature delle superficie conjugate in sistema ortogonale, leggi la cui dimostrazione diretta é stata oggetto di studio ai valenti geometri Sigg. G. Bertrand e O. Bonnet (**).

Le formole (18) del §. VII, essendo nel nostro caso $0 = a' = b' = c'$, si riducono alle

$$
(1)\qquad \frac{dx}{d\rho} = a\frac{d\rho}{dx}\,,\quad \frac{dx}{d\rho_1} = b\frac{d\rho_1}{dx}\,,\quad \frac{dx}{d\rho_2} = c\frac{d\rho_2}{dx}\,.
$$

Osserviamo che le due formole del calcolo differenziale

$$
\frac{dV}{d\rho} = \frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{d\rho} + \frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{d\rho} + \frac{dV}{dz}\cdot\frac{dz}{d\rho}\,,
$$

$$
\frac{dV}{d\rho_1} = \frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{d\rho_1} + \frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{d\rho_1} + \frac{dV}{dz}\cdot\frac{dz}{d\rho_1}\,,
$$

(*) Journal du M. Liouville, tom. V, pag. 313, an. 1840.

(**) Journal de l'école polytechnique, cahier 29 et 32.

in grazia delle relazioni (1) diventano

$$\text{(B)} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dV}{d\rho} = a\left(\dfrac{dV}{dx} \cdot \dfrac{d\rho}{dx} + \dfrac{dV}{dy} \cdot \dfrac{d\rho}{dy} + \dfrac{dV}{dz} \cdot \dfrac{d\rho}{dz}\right), \\ \dfrac{dV}{d\rho_1} = b\left(\dfrac{dV}{dx} \cdot \dfrac{d\rho_1}{dx} + \dfrac{dV}{dy} \cdot \dfrac{d\rho_1}{dy} + \dfrac{dV}{dz} \cdot \dfrac{d\rho_1}{dz}\right), \end{array} \right.$$

nelle quali equazioni, siccome nelle (1), non che in quelle che nasceranno da esse, si possono assoggettare simultaneamente alla permutazion circolare le lettere de' due gruppi (a, b, c), (ρ, ρ_1, ρ_2).

Se nella prima delle (B) si pone $V = \dfrac{d\rho}{dx}$, risulterà

$$\frac{d}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{dx} = \frac{a}{2} \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{d\rho}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2\right] = \frac{a}{2} \frac{d\alpha}{dx},$$

cioè risulterà la prima delle tre seguenti, e dalla prima le altre due:

$$\text{(2)} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{d\rho} \cdot \dfrac{d\rho}{dx} = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{d\alpha}{dx}; \\ \dfrac{d}{d\rho_1} \cdot \dfrac{d\rho_1}{dx} = \dfrac{b}{2} \cdot \dfrac{d\beta}{dx}; \\ \dfrac{d}{d\rho_2} \cdot \dfrac{d\rho_2}{dx} = \dfrac{c}{2} \dfrac{d\gamma}{dx}. \end{array} \right.$$

Se nelle due equazioni (B) si fa rispettivamente

$$V = \frac{d\rho_1}{dx}, \quad V = \frac{d\rho}{dx},$$

e poi si moltiplicano l'una per b e l'altra per a, e si sommano i prodotti, viene:

$$b\frac{d}{d\rho}\cdot\frac{d\rho_1}{dx}+a\frac{d}{d\rho_1}\cdot\frac{d\rho}{dx}=ab\frac{d}{dx}\left[\frac{d\rho}{dx}\cdot\frac{d\rho_1}{dx}+\frac{d\rho}{dy}\cdot\frac{d\rho_1}{dy}+\frac{d\rho}{dz}\cdot\frac{d\rho_1}{dz}\right]$$

$$=ab\frac{d\gamma'}{dx}=0.$$

Da questa, pel solito giro di lettere, si ottiene il sistema :

$$(3)\begin{cases} b\dfrac{d}{d\rho}\cdot\dfrac{d\rho_1}{dx}+a\dfrac{d}{d\rho_1}\cdot\dfrac{d\rho}{dx}=0, \\ c\dfrac{d}{d\rho_1}\cdot\dfrac{d\rho_2}{dx}+b\dfrac{d}{d\rho_2}\cdot\dfrac{d\rho_1}{dx}=0, \\ a\dfrac{d}{d\rho_2}\cdot\dfrac{d\rho}{dx}+c\dfrac{d}{d\rho}\cdot\dfrac{d\rho_2}{dx}=0. \end{cases}$$

Dalle (1) prendiamo la derivata della prima rispetto a ρ_1, e la derivata della seconda rispetto a ρ. Essendo

$$\frac{d^2x}{d\rho\, d\rho_1}=\frac{d^2x}{d\rho_1\, d\rho},$$

si otterrà

$$a\frac{d}{d\rho_1}\cdot\frac{d\rho}{dx}+\frac{d\rho}{dx}\cdot\frac{da}{d\rho_1}=b\frac{d}{d\rho}\cdot\frac{d\rho_1}{dx}+\frac{d\rho_1}{dx}\cdot\frac{db}{d\rho};$$

e da qui, avendo riguardo alla prima delle (3), nasce, madre delle altre due, la prima delle tre :

$$(4)\begin{cases} 2a\dfrac{d}{d\rho_1}\cdot\dfrac{d\rho}{dx}=\dfrac{d\rho_1}{dx}\cdot\dfrac{db}{d\rho}-\dfrac{d\rho}{dx}\cdot\dfrac{da}{d\rho_1}, \\ 2b\dfrac{d}{d\rho_2}\cdot\dfrac{d\rho_1}{dx}=\dfrac{d\rho_2}{dx}\cdot\dfrac{dc}{d\rho_1}-\dfrac{d\rho_1}{dx}\cdot\dfrac{db}{d\rho_2}, \\ 2c\dfrac{d}{d\rho}\cdot\dfrac{d\rho_2}{dx}=\dfrac{d\rho}{dx}\cdot\dfrac{da}{d\rho_2}-\dfrac{d\rho_2}{dx}\cdot\dfrac{dc}{d\rho}. \end{cases}$$

Da ciascuno de'quattro sistemi (1), (2), (3), (4) se ne fanno scaturire altri due analoghi col solo mutare la x nella y e nella z.

Relazioni tra le direzioni degli assi curvilinei σ, σ_1, σ_2 e tra le loro derivate parziali prese rispetto a
ρ, ρ_1, ρ_2.

Poichè le tre superficie (ρ), (ρ_1), (ρ_2) si tagliano in ogni punto M ad angolo retto, secondo tre linee od assi curvilinei σ, σ_1, σ_2, gli assi rettilinei Mx', My', Mz' tangenti nel punto M alle tre linee σ, σ_1, σ_2, saranno rettangolari. Supposti adunque rettangolari gli assi primitivi Ox, Oy, Oz, se, come già più sopra si è convenuto, si denotano per

$$(\lambda, \mu, \nu), \quad (\lambda', \mu', \nu'), \quad (\lambda'', \mu'', \nu'')$$

le direzioni positive de'nuovi assi Mx', My', Mz' rispetto ai primi, avremo:

$$\begin{aligned} \lambda &= \cos(xx'), & \lambda' &= \cos(xy'), & \lambda'' &= \cos(xz'), \\ \mu &= \cos(yx'), & \mu' &= \cos(yy'), & \mu'' &= \cos(yz'), \\ \nu &= \cos(zx'), & \nu' &= \cos(zy'), & \nu'' &= \cos(zz'); \end{aligned}$$

e dalla semplice ispezione di questo quadro si vede che le direzioni positive degli assi Ox, Oy, Oz, rispetto agli assi Mx', My', Mz', sono rappresentate da $(\lambda, \lambda', \lambda'')$, (μ, μ', μ''), (ν, ν', ν'').

Qui torna comodo d'introdurre le seguenti notazioni del Sig. Lamé:

$$H = \sqrt{a}, \quad H_1 = \sqrt{b}, \quad H_2 = \sqrt{c},$$

$$h = \sqrt{\alpha}, \quad h_1 = \sqrt{\beta}, \quad h_2 = \sqrt{\gamma},$$

donde

$$Hh = 1, \quad H_1 h_1 = 1, \quad H_2 h_2 = 1.$$

Ciò posto, le formole (17) del §. VII, combinate colle (1)

del § attuale, daranno

$$(5)\quad \begin{cases} \lambda = h\dfrac{dx}{d\rho} = H\dfrac{d\rho}{dx}, \\ \lambda' = h_1\dfrac{dx}{d\rho_1} = H_1\dfrac{d\rho_1}{dx}, \\ \lambda'' = h_2\dfrac{dx}{d\rho_2} = H_2\dfrac{d\rho_2}{dx}, \end{cases}$$

colle altre che nascono assoggettando simultaneamente alla permutazion circolare i due gruppi (λ, μ, ν), (x, y, z); e le (3) dello stesso §. VII diventano:

$$(6)\quad \begin{cases} dx' = Hd\rho, \quad dy' = H_1 d\rho_1, \quad dz' = H_2 d\rho_2; \\ d\rho = hdx', \quad d\rho_1 = h_1 dy', \quad d\rho_2 = h_2 dz'. \end{cases}$$

Fermiamoci alquanto a considerare il caso in cui risulta

$$H = H_1 = H_2.$$

In questo caso singolare, se le tre equazioni

$$(A)' \quad x = x(\rho, \rho_1, \rho_2), \; y = y(\rho, \rho_1, \rho_2), \; z = z(\rho, \rho_1, \rho_2),$$

si riguardano come rappresentanti tre superficie di cui le coordinate rettangolari siano ρ, ρ_1, ρ_2, essendone i parametri x, y, z, la considerazione dell'equazione:

$$d\rho^2 + d\rho_1^2 + d\rho_2^2 = h^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

fa palese, che le tre nuove superficie (A)' si taglieranno in ogni punto dello spazio ad angolo retto.

Per trovare un sistema di superficie conjugate, relative a questo caso, concepiamo nello spazio due figure (ossivvero due sistemi di punti) connesse tra loro per quella legge no-

tissima a cui ora si dà il nome di *trasformazione per raggi reciproci*, e che consiste in due cose : 1.° Che le due figure si possano disporre così che i loro *punti corrispondenti* M, m si trovino sopra un medesimo raggio emanante da un'origine fissa O ; 2.° Che questi punti corrispondenti sodisfacciano all'equazione

$$OM.Om = k\ , \quad \text{donde} \quad OM = \frac{k}{Om}\ ,$$

per la quale dato l'uno si determina subito l'altro.

Consideriamo sopra due raggi distinti le due coppie di punti corrispondenti (M, m), (N, n), talchè si abbia

$$OM = \frac{k}{Om}\ , \qquad ON = \frac{k}{On}\ .$$

La formola

$$\overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 - 2OM.ON\cos(MON)$$

darà

$$MN = \pm k\,\frac{mn}{Om.On}\ .$$

Per determinare il segno del secondo membro, osserviamo che se i punti N, n si fanno cadere sullo stesso primo raggio OM, allora si ha

$$MO + ON = MN\ ,$$

e

$$k\left(\frac{1}{mO}+\frac{1}{On}\right) = k\,\frac{mO+On}{mO.On} = -\,k\,\frac{mn}{Om.On}\ .$$

Dobbiamo dunque nell'equazion precedente scegliere il segno inferiore, e scrivere

$$MN = -k\,\frac{mn}{Om.On}\ .$$

Se il punto N è infinitamente vicino al punto M, anche il

punto n sarà infinitamente vicino al punto m, ed in questa ipotesi l'equazion precedente si traduce nella

$$(a) \qquad \frac{\mathrm{MN}}{mn} = -\frac{k}{\mathrm{O}m^2},$$

e sotto questa forma rende manifesto che se il punto N descrive intorno ad M una figura infinitesima, anche il punto n descriverà intorno ad m un altra figura infinitesima, che sarà *inversamente* o *direttamente* simile alla prima secondochè k è positivo o negativo. Infatti seguiamo i punti N, n nelle posizioni infinitamente vicine N′, n'. Si avrà

$$\frac{\mathrm{MN}}{mn} = \frac{\mathrm{MN}'}{mn'} = \frac{\mathrm{NN}'}{nn'} = -\frac{k}{\mathrm{O}m^2} = -\frac{\mathrm{OM}^2}{k}.$$

Così i due triangoli *corrispondenti* MNN′, mnn', avendo proporzionali i loro lati omologhi, sono simili nel rapporto

$$= -k.\mathrm{O}m^{-2}.$$

Sugli assi rettangolari Ox, Oy, Oz siano ρ, ρ_1, ρ_2 le projezioni del raggio OM, ed x, y, z siano le projezioni del raggio Om. Poichè le rette che hanno la stessa direzione, sono proporzionali alle loro projezioni omologhe, sarà

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{O}m} = \frac{\rho}{x} = \frac{\rho_1}{y} = \frac{\rho_2}{z},$$

ovvero, a causa di $\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{O}m} = \frac{k}{\mathrm{O}m^2} = \frac{\mathrm{OM}^2}{k}$,

$$(b) \quad \frac{\rho}{x} = \frac{\rho_1}{y} = \frac{\rho_2}{z} = \frac{k}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\rho^2+\rho_1^2+\rho_2^2}{k}.$$

Similmente sugli assi Ox, Oy, Oz siano (dρ, dρ_1, dρ_2), (dx, dy, dz) le projezioni rispettive delle due linee corrispondenti MN, mn infinitesime; dalla (a), ossia dalla

$$mn^2 = \frac{Om^4}{k^2}\,MN^2\,,$$

si ottiene

$$(c)\qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{k^2}{OM^4}(d\rho^2 + d\rho^2{}_1 + d\rho^2{}_2)\,.$$

L'esposte proprietà della trasformazione per raggi reciproci sono state dichiarate, ma con giro al tutto diverso, dal Sig. Liouville (*), il quale ha pur dimostrato, integrando una certa equazione del Sig. Lamé, che *le formole relative alla trasformazione per raggi reciproci sono le sole che sodifacciano alla relazione*;

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = H^2(d\rho^2 + d\rho^2{}_1 + d\rho^2{}_2).$$

Del rimanente, oltre il Sig. William Thomson (**) ed il Sig. Liouville, si sono occupati delle applicazioni di questa trasformazione per raggi reciproci, molti altri geometri ed in particolare il ch. Prof. Giusto Bellavitis.

Osservando la (*c*), si vede che le relazioni (*b*) somministrano due sistemi tripli di superficie ortogonali, secondochè vi si riguardano come parametri le ρ, ρ_1, ρ_2, ovvero le x, y, z.

Le superficie (ρ), (ρ_1), (ρ_2) del primo sistema, si riducono alle seguenti:

$$(d)\quad \begin{cases} \left(x - \dfrac{k}{2\rho}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\dfrac{k}{2\rho}\right)^2, \\[2ex] x^2 + \left(y - \dfrac{k}{2\rho_1}\right)^2 + z^2 = \left(\dfrac{k}{2\rho_1}\right)^2, \\[2ex] x^2 + y^2 + \left(z - \dfrac{k}{2\rho_2}\right)^2 = \left(\dfrac{k}{2\rho_2}\right)^2, \end{cases}$$

(*) Journal de Math. an 1847, Note a Monge, an. 1850.

(**) Journal de Math. an. 1845, pag 369.

e sono evidentemente tre superficie sferiche che toccano nell'origine O i tre piani coordinati yz, zx, xy, e dove perciò si tagliano ad angolo retto, e tengono il lor centro mobile sopra i tre assi rettangolari Ox, Oy, Oz. Le superficie del secondo sistema son pure tre superficie sferiche, perfettamente analoghe alle precedenti.

Si ponga or mente al seguente teorema, a mia notizia, nuovo.

Se tre superficie sferiche, conjugate in sistema ortogonale, sono rappresentate ciascuna da un'equazione ad un solo parametro, le tre superficie passeranno costantemente per un punto fisso, e toccheranno in questo punto tre piani fissi ortogonali, e le loro equazioni saranno della forma (d).

DIMOSTRAZIONE. Sia M un punto particolare dove si segano ad angolo retto le tre superficie sferiche. Gli assi rettangolari Mx', My', Mz' tangenti, nel punto M, alle loro intersezioni σ, σ_1, σ_2, saranno normali rispettivamente alle stesse superficie, e passeranno per il loro centro. Quindi, ove queste superficie si riferiscano agli assi Mx', My', Mz', le loro equazioni (d') saranno ciò che diventano le (d) allorchè ad x, y, z si sostituiscono le x', y', z', relative a questi assi. Rispetto agli assi fissi Ox, Oy, Oz, siano x_1, y_1, z_1 le coordinate del punto M, e le direzioni de'nuovi assi Mx', My', Mz' si esprimano come più sopra. Avremo dalla trasformazione delle coordinate

$$x' = \lambda\,(x - x_1) + \mu\,(y - y_1) + \nu\,(z - z_1)\,,$$
$$y' = \lambda'\,(x - x_1) + \mu'\,(y - y_1) + \nu'\,(z - z_1)\,,$$
$$z' = \lambda''(x - x_1) + \mu''(y - y_1) + \nu''(z - z_1)\,.$$

Sostituendo questi valori nelle (d'), otterremo l'equazioni più generali di tre superficie sferiche conjugate in sistema ortogonale. Ora se vogliamo che queste equazioni non contengano ciascuna che un solo parametro, l'uno distinto dal-

l'altro, è necessario suppor costanti tutte le quantità (diverse da x, y, z) che entrano simultaneamente nelle tre equazioni, vale a dire convien suppor costanti le coordinate (x_1, y_1, z_1) del punto M, e le direzioni (λ, μ, ν) ec. degli assi Mx', My', Mz', ed avremo così l'equazioni più generali ad un solo parametro, di tre superficie sferiche conjugate in sistema ortogonale. Affinchè quest'equazioni possano formarsi è dunque necessario che le tre superficie sferiche passino per un punto fisso, e che tocchino in questo punto tre piani fissi rettangolari, e che però si possano rappresentare da equazioni della forma (d).

Convenzione notabile, e identità.

Qui giova richiamare che il punto arbitrario $M(x, y, z)$ per ove passano le tre superficie conjugate (ρ), (ρ_1), (ρ_2), è la origine de'tre assi curvilinei σ, σ_1, σ_2, linee d' intersezione di esse superficie, non che degli assi rettilinei Mx', My', Mz' tangenti, nel punto M, agli assi curvilinei; e che inoltre dx', dy', dz' rappresentano, secondo gli assi Mx', My', Mz', le componenti di una retta infinitesima ds, nascente da M (si veda il §. VII). Ciò posto, è evidente che le dx', dy', dz' si possono pur riguardare, nel punto M, come i primi elementi $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ degli assi curvilinei σ, σ_1, σ_2, e che per conseguenza l'equazioni (6) equivalgono alle seguenti

$$(6)'\quad \begin{cases} d\sigma = H\, d\rho, \quad d\sigma_1 = H_1\, d\rho_1, \quad d\sigma_2 = H_2\, d\rho_2, \\ d\rho = h\, d\sigma, \quad d\rho_1 = h_1\, d\sigma_1, \quad d\rho_2 = h_2\, d\sigma_2. \end{cases}$$

Il che richiamato, osserviamo che gli archi σ, σ_1, σ_2 non si possono prendere, in un modo generale, come *variabili indipendenti* rispetto alle altre quantità, per esempio, rispetto alle H, H_1, H_2. Infatti queste linee coordinate σ, σ_1, σ_2 cangiano di luogo e di forma passando da un punto (x, y, z) ad un altro punto qualunque.

Onde è che se si vogliono introdurre nel calcolo espressioni analoghe alle seguenti :

$$\frac{d}{d\sigma}\cdot\frac{dH}{d\sigma_1}, \quad \frac{d}{d\sigma_1}\cdot\frac{dH}{d\sigma_2}, \quad \text{ec.}$$

(uso che io adotterò in appresso, siccome fonte di gran simmetria e semplicità ne'risultati) convien sempre sostituire, o almeno concepir sostituiti a $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ i loro valori $Hd\rho$, $H_1\, d\rho_1$, $H_2\, d\rho_2$, e dopo eseguite le differenzazioni, sostituire di nuovo a $d\rho$, $d\rho_1$, $d\rho_2$ l'espressioni equivalenti $d\sigma H^{-1}$, $d\sigma_1\, H^{-1}{}_1$, $d\sigma_2 H^{-1}{}_2$. Per questa convenzione abbiamo l'equivalenze simboliche del tipo :

$$\frac{d}{d\sigma}\cdot\frac{dH}{d\sigma_1}=\frac{1}{H}\,\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{H_1}\cdot\frac{dH}{d\rho_1}\right);$$

e da qui s'inferisce

$$\frac{d}{d\sigma}\cdot\frac{dH}{d\sigma_1}=\frac{1}{HH_1}\cdot\frac{d^2H}{d\rho d\rho_1}-\frac{1}{HH^2{}_1}\cdot\frac{dH}{d\rho_1}\cdot\frac{dH_1}{d\rho}.$$

Si trova similmente

$$\frac{d}{d\sigma_1}\cdot\frac{dH}{d\sigma}=\frac{1}{HH_1}\cdot\frac{d^2H}{d\rho d\rho_1}-\frac{1}{H_1H^2}\cdot\frac{dH}{d\rho}\cdot\frac{dH}{d\rho_1},$$

e per conseguenza

$$\frac{d}{d\sigma}\cdot\frac{dH}{d\sigma_1}-\frac{d}{d\sigma_1}\cdot\frac{dH}{d\sigma}=\frac{1}{H}\cdot\frac{dH}{d\sigma}\cdot\frac{dH}{d\sigma_1}-\frac{1}{H_1}\cdot\frac{dH}{d\sigma_1}\cdot\frac{dH_1}{d\sigma}.$$

Notiamo adunque che le due quantità

$$\frac{d}{d\sigma}\cdot\frac{dH}{d\sigma_1}, \quad \frac{d}{d\sigma_1}\cdot\frac{dH}{d\sigma}$$

non sono eguali, o che non è lecito di porre :

$$\frac{d}{d\sigma}\cdot\frac{dH}{d\sigma_1}=\frac{d}{d\sigma_1}\cdot\frac{dH}{d\sigma}\;.$$

Operando coll'indicata avvertenza, si trova

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d\log H}{d\sigma}\right)=\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{H}\cdot\frac{dH}{d\sigma}\right)=\frac{1}{H}\cdot\frac{d}{d\sigma}\cdot\frac{dH}{d\sigma}-\frac{1}{H^2}\left(\frac{dH}{d\sigma}\right)^2$$

$$=\frac{1}{H}\cdot\frac{d}{d\sigma}\cdot\frac{dH}{d\sigma}-\left(\frac{d\log H}{d\sigma}\right)^2\;,$$

donde la prima delle due seguenti identità; la seconda si trova in modo simile:

$$(7)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{H}\cdot\dfrac{d}{d\sigma}\cdot\dfrac{dH}{d\sigma}=\dfrac{d}{d\sigma}\left(\dfrac{d\log H}{d\sigma}\right)+\left(\dfrac{d\log H}{d\sigma}\right)^2\;,\\[2ex]\dfrac{1}{H}\cdot\dfrac{d}{d\sigma_1}\cdot\dfrac{dH}{d\sigma_2}=\dfrac{d}{d\sigma_1}\left(\dfrac{d\log H}{d\sigma_2}\right)+\dfrac{d\log H}{d\sigma_1}\cdot\dfrac{d\log H}{d\sigma_2}\;.\end{array}\right.$$

E queste identità son madri di tutte quelle che nascono assoggettando alla permutazion circolare dapprima le sole lettere $(\sigma, \sigma_1, \sigma_2)$, e poscia in tutta la famiglia delle nate, le sole lettere (H, H_1, H_2).

Si noti infine che i valori inversi de' raggi di curvatura principali delle tre superficie (ρ_2), (ρ), (ρ_1) trovati più sopra (R), ove si esprimano colle nuove notazioni, diventano rispettivamente:

$$(R)'\quad\left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{d\log H}{d\sigma_2}\,,\;\dfrac{d\log H_1}{d\sigma_2}\right),\\[2ex]\left(\dfrac{d\log H_1}{d\sigma}\,,\;\dfrac{d\log H_2}{d\sigma}\right),\\[2ex]\left(\dfrac{d\log H_2}{d\sigma_1}\,,\;\dfrac{d\log H}{d\sigma_1}\right).\end{array}\right.$$

Cerchiamo adesso la forma che rivestono le (2), (3) e (4), allorchè si adoperano le notazioni precedenti, e vi si fa

$$\frac{d\rho}{dx}=\frac{\lambda}{H}\,,\ \frac{d\rho_1}{dx}=\frac{\lambda'}{H_1}\,,\ \frac{d\rho_2}{dx}=\frac{\lambda''}{H_2}\,,$$

eguaglianze che si desumono dalle (5).

E primieramente osserviamo che il principio espresso da

$$\frac{dV}{dx}=\frac{dV}{d\rho}\cdot\frac{d\rho}{dx}+\frac{dV}{d\rho_1}\cdot\frac{d\rho_1}{dx}+\frac{dV}{d\rho_2}\cdot\frac{d\rho_2}{dx}\,,$$

si traduce nel seguente

$$\frac{dV}{dx}=\lambda\frac{dV}{d\sigma}+\lambda'\frac{dV}{d\sigma_1}+\lambda''\frac{dV}{d\sigma_2}\,,$$

dove in luogo di V sostitueremo successivamente H, H_1, H_2.

La prima delle (2), cioé $\frac{d}{d\rho}\cdot\frac{d\rho}{dx}=\frac{a}{2}\,\frac{da}{dx}$, diviene

$$\frac{d}{d\rho}\cdot\frac{\lambda}{H}=\frac{H^2}{2}\cdot\frac{d}{dx}\cdot H^{-2}=-\frac{1}{H}\cdot\frac{dH}{dx}\,,$$

ed appresso:

$$\frac{1}{H}\cdot\frac{d\lambda}{d\rho}-\frac{\lambda}{H}\cdot\frac{dH}{d\sigma}=-\frac{1}{H}\left(\lambda\frac{dH}{d\sigma}+\lambda'\frac{dH}{d\sigma_1}+\lambda''\frac{dH}{d\sigma_2}\right);$$

donde

$$\frac{d\lambda}{d\rho}=-\left(\lambda'\frac{dH}{d\sigma_1}+\lambda''\frac{dH}{d\sigma_2}\right),$$

nella quale è lecito di assoggettare simultaneamente alla permutazion circolare ciascuno de'quattro gruppi

$$(\lambda,\lambda',\lambda''),\quad(\rho,\rho_1,\rho_2),\quad(\sigma,\sigma_1,\sigma_2),\quad(H,H_1,H_2).$$

Si ha dunque il sistema

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{d\rho} = -\left(\lambda' \dfrac{dH}{d\sigma_1} + \lambda'' \dfrac{dH}{d\sigma_2}\right), \\ \dfrac{d\lambda'}{d\rho_1} = -\left(\lambda'' \dfrac{dH_1}{d\sigma_2} + \lambda \dfrac{dH_1}{d\sigma}\right), \\ \dfrac{d\lambda''}{d\rho_2} = -\left(\lambda \dfrac{dH_2}{d\sigma} + \lambda' \dfrac{dH_2}{d\sigma_1}\right). \end{cases}$$

Similmente, la prima delle (4), cioè

$$2a \frac{d}{d\rho_1} \cdot \frac{d\rho}{dx} = \frac{d\rho_1}{dx} \cdot \frac{db}{d\rho} - \frac{d\rho}{dx} \cdot \frac{da}{d\rho_1},$$

si converte successivamente in

$$2H^2 \frac{d}{d\rho_1} \cdot \frac{\lambda}{H} = \frac{\lambda'}{H_1} \cdot \frac{d}{d\rho} H^2_1 - \frac{\lambda}{H} \cdot \frac{d}{d\rho_1} H^2,$$

$$H \frac{d\lambda}{d\rho_1} - \lambda \frac{dH}{d\rho_1} = \lambda' \frac{dH_1}{d\rho} - \lambda \frac{dH}{d\rho_1}, \quad \frac{d\lambda}{d\rho_1} = \lambda' \frac{dH_1}{d\sigma}.$$

Da qui, per legge manifesta di simmetria, si trae il sistema

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{d\rho_1} = \lambda' \dfrac{dH_1}{d\sigma}, \quad \dfrac{d\lambda}{d\rho_2} = \lambda'' \dfrac{dH_2}{d\sigma}, \\ \dfrac{d\lambda'}{d\rho_2} = \lambda'' \dfrac{dH_2}{d\sigma_1}, \quad \dfrac{d\lambda'}{d\rho} = \lambda \dfrac{dH}{d\sigma_1}, \\ \dfrac{d\lambda''}{d\rho} = \lambda \dfrac{dH}{d\sigma_2}, \quad \dfrac{d\lambda''}{d\rho_1} = \lambda' \dfrac{dH_1}{d\sigma_2}. \end{cases}$$

Proponiamoci di determinare i valori delle due espressioni $\frac{d^2\lambda}{d\rho\, d\rho_1}$, $\frac{d^2\lambda}{d\rho_1\, d\rho}$, per eguagliarli poscia tra loro. Dall'equazione

$$\frac{d\lambda}{d\rho} = -\left(\lambda' \frac{dH}{d\sigma_1} + \lambda'' \frac{dH}{d\sigma_2}\right),$$

e dalle (8), si ricava

$$\frac{d^2\lambda}{d\rho d\rho_1} = -\left(\lambda' \frac{d}{d\rho_1} \cdot \frac{dH}{d\sigma_1} + \lambda'' \frac{d}{d\rho_1} \cdot \frac{dH}{d\sigma_2}\right) - \left(\frac{dH}{d\sigma_1} \cdot \frac{d\lambda'}{d\rho_1} + \frac{dH}{d\sigma_2} \cdot \frac{d\lambda''}{d\rho_1}\right)$$

$$= -\lambda'\left(\frac{d}{d\rho_1} \cdot \frac{dH}{d\sigma_1} + \frac{dH}{d\sigma_2} \cdot \frac{dH_1}{d\sigma_2}\right) - \lambda''\left(\frac{d}{d\rho_1} \cdot \frac{dH}{d\sigma_2} - \frac{dH}{d\sigma_1} \cdot \frac{dH_1}{d\sigma_2}\right)$$

$$+ \lambda \frac{dH}{d\sigma_1} \cdot \frac{dH_1}{d\sigma}.$$

E dall' equazione $\frac{d\lambda}{d\rho_1} = \lambda' \frac{dH_1}{d\sigma}$ si ricava

$$\frac{d^2\lambda}{d\rho_1 d\rho} = \lambda' \frac{d}{d\rho} \cdot \frac{dH_1}{d\sigma} + \frac{dH_1}{d\sigma} \cdot \frac{d\lambda'}{d\rho} = \lambda' \frac{d}{d\rho} \cdot \frac{dH_1}{d\sigma} + \lambda \frac{dH}{d\sigma_1} \cdot \frac{dH_1}{d\sigma}.$$

Eguagliando questi risultati, viene

$$0 = \lambda'\left(\frac{d}{d\rho} \cdot \frac{dH_1}{d\sigma} + \frac{d}{d\rho_1} \cdot \frac{dH}{d\sigma_1} + \frac{dH}{d\sigma_2} \cdot \frac{dH_1}{d\sigma_2}\right)$$

$$+ \lambda''\left(\frac{d}{d\rho_1} \cdot \frac{dH}{d\sigma_2} - \frac{dH}{d\sigma_1} \cdot \frac{dH_1}{d\sigma_2}\right).$$

Siccome la direzione $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ dell'asse primitivo Ox, rispetto ai nuovi assi Mx', My', Mz', è affatto arbitraria, non avendo la trasformazione delle coordinate alcuna influenza sulle quantità ρ, ρ_1, ρ_2, H, H_1, H_2; così l'equazione precedente si dee verificare indipendentemente dai valori di λ', λ''. Si avrà dunque:

$$\frac{d}{d\rho_1} \cdot \frac{dH}{d\sigma_2} - \frac{dH}{d\sigma_1} \cdot \frac{dH_1}{d\sigma_2} = 0,$$

$$\frac{d}{d\rho} \cdot \frac{dH_1}{d\sigma} + \frac{d}{d\rho_1} \cdot \frac{dH}{d\sigma_1} + \frac{dH}{d\sigma_2} \cdot \frac{dH_1}{d\sigma_2} = 0.$$

Queste due formole divise per HH_1, si cangiano nelle

$$\frac{1}{H}\cdot\frac{d}{d\sigma_1}\cdot\frac{dH}{d\sigma_2}-\frac{d\log H}{d\sigma_1}\cdot\frac{d\log H_1}{d\sigma_2}=0,$$

$$\frac{1}{H_1}\cdot\frac{d}{d\sigma}\cdot\frac{dH_1}{d\sigma}+\frac{1}{H}\cdot\frac{d}{d\sigma_1}\cdot\frac{dH}{d\sigma_1}+\frac{d\log H}{d\sigma_2}\cdot\frac{d\log H_1}{d\sigma_2}=0,$$

dalle quali, se sostituiamo all'espressioni $\frac{1}{H}\cdot\frac{d}{d\sigma_1}\cdot\frac{dH}{d\sigma_2}$, etc., le loro equivalenti desunte dalle identità (7), otterremo:

$$(9)\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{d\log H}{d\sigma_2}\right)=-\frac{d\log H}{d\sigma_1}\left(\frac{d\log H}{d\sigma_2}-\frac{d\log H_1}{d\sigma_2}\right),\\&\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d\log H_1}{d\sigma}\right)+\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{d\log H}{d\sigma_1}\right)\\&=-\left[\frac{d\log H}{d\sigma_2}\cdot\frac{d\log H_1}{d\sigma_2}+\left(\frac{d\log H_1}{d\sigma}\right)^2+\left(\frac{d\log H}{d\sigma_1}\right)^2\right]\end{aligned}\right.$$

con tutte le altre che nascon da esse assoggettando simultaneamente alla permutazion circolare le lettere de'due gruppi $(\sigma, \sigma_1, \sigma_2)$, (H, H_1, H_2).

E queste sono le formole che contengono, come or vedremo, le due leggi del Sig. Lamé relative alla curvatura delle superficie conjugate in sistema ortogonale.

Nel caso di $H=H_1=H_2$, la prima dell' equazioni (9) si risolve evidentemente nelle due seguenti:

$$\frac{d\log H_1}{d\sigma_2}-\frac{d\log H}{d\sigma_2}=0,\qquad \frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{d\log H}{d\sigma_2}\right)=0,$$

le quali dicono rispettivamente che in ciascuna delle tre superficie conjugate (ρ), (ρ_1), (ρ_2), come nella (ρ_2), i due

raggi principali di curvatura sono eguali in ogni punto , e che di più non variano di grandezza nel passare da un punto all'altro della stessa superficie. E siccome ogni raggio principale è incontrato nel centro da quello che gli succede allorchè si cammina sopra una linea di curvatura, così quando questi raggi principali sono tutti di egual lunghezza, concorreranno necessariamente tutti in un medesimo punto, e per conseguenza la superficie a cui appartengono sarà sferica. Rimane così dimostrato il seguente

TEOREMA. *Le superficie* (ρ), (ρ_1), (ρ_2) *conjugate in sistema ortogonale, e sodisfacenti all'equazione*

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = H^2(d\rho^2 + d\rho^2{}_1 + d\rho^2{}_2) ,$$

sono superficie sferiche, le quali essendo , per supposizione, ciascuna ad un solo parametro, possono rappresentarsi con tre equazioni della forma :

$$\left\{\begin{array}{l} \left(x - \frac{k}{2\rho}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{k}{2\rho}\right)^2 , \\ x^2 + \left(y - \frac{k}{2\rho_1}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{k}{2\rho_1}\right)^2 , \\ x^2 + y^2 + \left(z - \frac{k}{2\rho_2}\right)^2 = \left(\frac{k}{2\rho_2}\right)^2 . \end{array}\right.$$

Da questo teorema discende , quasi corollario immediato e senza bisogno d'integrazione alcuna, la proposizione del Sig. Liouville citata di sopra.

Cerchiamo per ultimo di tradurre nel linguaggio del Sig. Lamé le formole (9).

Noi sappiamo: 1.° che $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, elementi iniziali degli assi curvilinei σ, σ_1 , σ_2 , sono tre archi infinitesimi che, a partire da un punto arbitrario (x, y, z), si hanno da

da percorrere sulle normali Mx', My', Mz' alle superficie (ρ), (ρ_1), (ρ_2) per passare alle superficie della stessa specie infinitamente vicine; 2.° che i tre piani rettangolari $(d\sigma, d\sigma_1)$, $(d\sigma_1, d\sigma_2)$, $(d\sigma_2, d\sigma)$ determinano in ciascuna delle tre superficie due sezioni normali, di cui i raggi osculatori sono i raggi principali della superficie.

Riguardando gli archi $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, come gli elementi iniziali di queste sezioni, siano da e $d\alpha$ gli angoli di contingenza dell'arco $d\sigma$ considerato successivamente ne'due piani $(d\sigma_2, d\sigma)$, $(d\sigma_1, d\sigma)$ normali alle superficie (ρ_2) e (ρ_1): da_1 e $d\alpha_1$ quelli dell' arco $d\sigma_1$, ne' piani $(d\sigma, d\sigma_1)$, $d\sigma_2$, $d\sigma_1)$ normali alle superficie (ρ) e (ρ_1); da_2 e $d\alpha_2$ quelli dell'arco $d\sigma_2$ ne'piani $(d\sigma_1, d\sigma_2)$, $(d\sigma, d\sigma_2)$ normali alle superficie (ρ_1) e (ρ_2); e si ponga

$$d\sigma = c\,da = \gamma\,d\alpha\,,$$

$$d\sigma_1 = c_1 da_1 = \gamma_1 d\alpha_1\,,$$

$$d\sigma_2 = c_2 da_2 = \gamma_2 d\alpha_2\,.$$

Le tre coppie di quantità (c, γ), (c_1, γ_1), (c_2, γ_2) rappresentano i sei raggi di curvatura principali delle tre superficie conjugate; e i valori inversi di questi raggi, vale a dire

$$\left(\frac{1}{c}, \frac{1}{\gamma}\right), \quad \left(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{\gamma_1}\right), \quad \left(\frac{1}{c_2}, \frac{1}{\gamma_2}\right),$$

sono le *curvature* che, considerate due a due, vengono dette dal Sig. Lamé *conjugate in asse*, e *conjugate in superficie*.

Le curvature di ciascuna di coteste tre coppie sono *conjugate in asse*, e quest'asse è σ per la prima coppia, è σ_1 per la seconda, ed è σ_2 per la terza coppia; essendochè $\left(\frac{1}{c}, \frac{1}{\gamma}\right)$ rappresentano le curvature dell'arco $d\sigma$ considerato dapprima sulla superficie $\sigma\sigma_1$, e poscia sulla superficie $\sigma\sigma_2$; si-

milmente $\left(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{\gamma_1}\right)$ rappresentano le curvature dell' arco $d\sigma_1$, considerato prima sulla superficie $\sigma_1\sigma_2$, e poscia sulla superficie $\sigma_1\sigma$; ed infine $\left(\frac{1}{c_2}, \frac{1}{\gamma_2}\right)$ quelle dell'arco $d\sigma_2$ considerato prima sulla superficie $\sigma_2\sigma$, e poscia sulla superficie $\sigma_2\sigma_1$.

Le curvature *conjugate in superficie* sono: sulla superficie $\sigma\sigma_1$, quelle degli archi $d\sigma$, $d\sigma_1$, cioè $\left(\frac{1}{c}, \frac{1}{\gamma_1}\right)$; sulla superficie $\sigma_1\sigma_2$, quelle degli archi $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, cioè $\left(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{\gamma_2}\right)$; e sulla superficie $\sigma_2\sigma$, quelle degli archi $d\sigma_2$, $d\sigma$, cioè $\left(\frac{1}{c_2}, \frac{1}{\gamma}\right)$. In una parola le curvature conjugate in superficie, (ρ_2), (ρ), (ρ_1), sono rispettivamente comprese nelle tre coppie

$$\left(\frac{1}{c}, \frac{1}{\gamma_1}\right), \quad \left(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{\gamma_2}\right), \quad \left(\frac{1}{c_2}, \frac{1}{\gamma}\right).$$

Per *piano di curvatura* s' intenda quello del suo circolo osculatore; *per variazione di una quantità secondo una certa linea*, s'intenda il limite del rapporto dell' accrescimento di questa quantità all'arco percorso sulla linea.

Poichè le curvature conjugate in superficie, $(\sigma\sigma_1)$, $(\sigma_1\sigma_2)$, $(\sigma_2\sigma)$, nel punto M, sono rappresentate tanto da

$$\left(\frac{d\log H}{d\sigma_2}, \frac{d\log H_1}{d\sigma_2}\right), \left(\frac{d\log H_1}{d\sigma}, \frac{d\log H_2}{d\sigma}\right), \left(\frac{d\log H_2}{d\sigma_1}, \frac{d\log H}{d\sigma_1}\right)$$

quanto da

$$\left(\frac{1}{c}, \frac{1}{\gamma_1}\right), \quad \left(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{\gamma_2}\right), \quad \left(\frac{1}{c_2}, \frac{1}{\gamma}\right);$$

le due equazioni (9) equivarranno alle

$$\frac{d}{d\sigma_1}\cdot\frac{1}{c}=-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{\gamma_1}\right),$$

$$\frac{d}{d\sigma}\cdot\frac{1}{c_1}+\frac{d}{d\sigma_1}\cdot\frac{1}{\gamma}=-\left[\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{\gamma_1}+\left(\frac{1}{c_1}\right)^2+\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2\right].$$

Ecco ora in quali termini il Sig. Lamé traduce queste due equazioni.

I. *La variazione di una curvatura secondo l'asse normale al suo piano, è uguale al prodotto negativo della sua conjugata in asse, pel suo eccesso sulla sua conjugata in superficie.*

II. *Il prodotto delle due curvature di una stessa superficie, aumentato della somma de'quadrati delle loro conjugate in asse, è uguale, ma di segno contrario, alla somma delle variazioni di queste due ultime curvature secondo i loro assi reciproci.*

Roma, 1 Settembre 1853.



INTORNO AD UN TEOREMA DI MECCANICA ANALITICA.

NOTA

DEL SIG. PROF. F. BRIOSCHI

Indicando con q_1 , $q_2 \ldots . q_n$, n variabili indipendenti , con T la semisomma delle forze vive , con U la funzione delle forze, e con p_1 , $p_2 \ldots , p_n$ ordinatamente le espressioni

$$\frac{dT}{dq'_1}, \frac{dT}{dq'_2} \cdots \frac{dT}{dq'_n};$$

le equazioni del movimento assumono come è noto la forma:

$$(1) \qquad \frac{dq_r}{dt} = \frac{d(T-U)}{dp_r}, \qquad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{d(T-U)}{dq_r}.$$

nelle quali facciasi $r = 1, 2, 3 \ldots n$.

Se $a = \varphi$, $b = \psi$ sono due integrali di quelle equazioni alle derivate, ha luogo come è noto la proprietà che

$$\sum\left(\frac{da}{dp_r}\frac{db}{dq_r} - \frac{da}{dq_r}\frac{db}{dp_r}\right) = \text{Cos.}^e$$

Questo importante teorema dovuto a Poisson, venne indicato da Jacobi come mezzo di ricerca degli integrali nei problemi di dinamica (*). Il Sig. Bertrand in un lavoro comunicato recentemente all'Accademia delle Scienze (**) ha enun-

(*) Journal de Liouville. Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique par M. Bertrand. Octobre 1852. Annali di B. Tortolini. Sulla variazione delle costanti arbitrarie nei problemi della dinamica. Agosto 1853.

(**) Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences. N. 19. — 8 Nov. 1852.

ciato un nuovo teorema analogo a quello di Poisson, la dimostrazione e generalizzazione del quale teorema formano lo scopo di questa nota. Il teorema del Sig. Bertrand è il seguente : Se :

$$\alpha = \varphi_1 , \quad \beta = \varphi_2 , \quad \gamma = \varphi_3 , \quad \delta = \varphi_4 .$$

Sono quattro integrali di un problema di dinamica ; la espressione :

$$(2) \qquad \sum\nolimits_r \sum\nolimits_s \begin{vmatrix} \frac{d\alpha}{dp_r} & \frac{d\alpha}{dq_r} & \frac{d\alpha}{dp_s} & \frac{d\alpha}{dq_s} \\ \frac{d\beta}{dp_r} & \frac{d\beta}{dq_r} & \frac{d\beta}{dp_s} & \frac{d\beta}{dq_s} \\ \frac{d\gamma}{dp_r} & \frac{d\gamma}{dq_r} & \frac{d\gamma}{dq_s} & \frac{d\gamma}{dq_s} \\ \frac{d\delta}{dp_r} & \frac{d\delta}{dq_r} & \frac{d\delta}{dp_s} & \frac{d\delta}{dq_s} \end{vmatrix}$$

nella quale pongasi $r = 1, 2, 3 \ldots n$, $s = 1, 2, 3 \ldots n$, sarà costante per tutta la durata del movimento, per cui indicandola con $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, la equazione :

$$(3) \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \text{cost}^e .$$

Sarà un quinto integrale od una identità.

Osserviamo che il determinante dell'espressione (2) eguaglia la somma dei prodotti e due a due dei determinanti binarj che si ottengono combinando opportunamente gli elementi del determinante medesimo, per cui si ha che quella espressione (2) è eguale alla seguente :

$$\Sigma_r\Sigma_s\left\{\begin{vmatrix}\frac{d\alpha}{dp_r}, & \frac{d\alpha}{dq_r}\\ \frac{d\beta}{dp_r}, & \frac{d\beta}{dq_r}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{d\gamma}{dp_s}, & \frac{d\gamma}{dq_s}\\ \frac{d\delta}{dp_s}, & \frac{d\delta}{dq_s}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\frac{d\alpha}{dp_r}, & \frac{d\alpha}{dp_r}\\ \frac{d\gamma}{dp_r}, & \frac{d\gamma}{dq_r}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{d\beta}{dp_s}, & \frac{d\beta}{dq_s}\\ \frac{d\delta}{dp_s}, & \frac{d\delta}{dq_s}\end{vmatrix}\right.$$

$$+\begin{vmatrix}\frac{d\alpha}{dp_r}, & \frac{d\alpha}{dq_r}\\ \frac{d\delta}{dp_r}, & \frac{d\delta}{dq_r}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{d\beta}{dp_s}, & \frac{d\beta}{dq_s}\\ \frac{d\gamma}{dp_s}, & \frac{d\gamma}{dq_s}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{d\beta}{dp_r}, & \frac{d\beta}{dq_s}\\ \frac{d\gamma}{dp_r}, & \frac{d\gamma}{dq_s}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{d\alpha}{dp_s}, & \frac{d\alpha}{dq_s}\\ \frac{d\delta}{dp_s}, & \frac{d\delta}{dq_s}\end{vmatrix}$$

$$\left.-\begin{vmatrix}\frac{d\beta}{dp_r}, & \frac{d\beta}{dq_r}\\ \frac{d\delta}{dp_r}, & \frac{d\delta}{dq_r}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{d\alpha}{dp_s}, & \frac{d\alpha}{dq_s}\\ \frac{d\gamma}{dp_s}, & \frac{d\gamma}{dq_s}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{d\gamma}{dp_r}, & \frac{d\gamma}{dq_s}\\ \frac{d\delta}{dp_r}, & \frac{d\delta}{dp_r}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{d\alpha}{dp_s}, & \frac{d\alpha}{dp_s}\\ \frac{d\beta}{dp_s}, & \frac{d\beta}{dq_s}\end{vmatrix}\right\}$$

e quindi si avrà :

$$(4)\quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 2[(\alpha, \beta)(\gamma, \delta) + (\alpha, \gamma)(\delta, \beta) + (\alpha, \delta)(\beta, \gamma)],$$

ed in conseguenza del teorema di Poisson ne risulterà l'equazione (3).

È chiaro pel processo di dimostrazione di cui si è fatto uso che il teorema del Sig. Bertrand può essere generalizzato allorquando si considerino sei, otto . . . . integrali di un problema. Difatti le espressioni che in questi casi terranno il luogo della $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ saranno decomponibili in somme di prodotti a tre, a tre; a quattro a quattro ec. di espressioni della forma di quelle di Poisson, e quindi godranno della conosciuta proprietà di queste. Per esempio se α, β, γ, δ, η, ξ fossero sei costanti di un problema di dinamica si avrebbe la relazione :

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \xi) = 3[(\alpha, \beta)(\gamma, \delta, \eta, \xi) + (\alpha, \gamma)(\beta, \delta, \xi, \eta)$$
$$+ (\alpha, \delta)(\beta, \gamma, \eta, \xi) + (\alpha, \eta)(\beta, \gamma, \xi, \delta)$$
$$+ (\alpha, \xi)(\beta, \gamma, \delta, \eta)] = \text{cost.}^e$$

Le costanti alle quali si sono dimostrate eguali le espressioni analoghe alle (α, β, γ, δ) hanno valori determinati allorquando le costanti α, β ...... sieno i valori iniziali degli elementi del moto, oppure sieno quelli forniti dal metodo di Hamilton. Se:

$$p_1 = \frac{d\varphi}{dq_1}, \quad p_2 = \frac{d\varphi}{dq_2} \; \ldots \; p_n = \frac{d\varphi}{dq_n}$$

$$\beta_1 = \frac{d\varphi}{d\alpha_1}, \quad \beta_r = \frac{d\varphi}{d\alpha_r} \; \ldots \; \beta_n = \frac{d\varphi}{d\alpha_n}$$

sono gli integrali delle equazioni (1), si avrebbero facilmente le:

$$(\alpha_r, \beta_r, \alpha_s, \beta_s) = 2,$$
$$(\alpha_r, \beta_r, \alpha_t, \beta_s) = 0,$$
$$(\alpha_t, \beta_r, \alpha_t, \beta_s) = 0,$$

ponendo nella equazione (4) i valori corrispondenti delle funzioni di Poisson.

Pavia 4 Settembre 1853.



INTORNO AD ALCUNE TRASFORMAZIONI D' INTEGRALI MULTIPLI

MEMORIA (*)

DEL SIG. ANGELO GENOCCHI



La trasformazione delle variabili negl'integrali multipli offre uno de'mezzi più fecondi sì per giungere alla determinazione o riduzione di questi integrali, e sì per iscoprire fra più integrali semplici tali relazioni che contengono importanti proprietà di funzioni trascendenti. Accennerò le ricerche di Laplace intorno agli integrali Euleriani, pubblicate fra le Memorie dell'Accademia delle Scienze di Parigi pel 1782, pag. 13-20, e sopratutto le recenti speculazioni di parecchi geometri intorno alla sostituzione delle coordinate ellittiche negl'integrali multipli, sostituzione che ristretta dapprima a due o tre variabili, allargata poi a qualsivoglia numero di variabili, diede teoremi nuovi e notabili intorno ai trascendenti Abeliani. Usò le coordinate ellittiche il signor Catalan applicandole alla trasformazione di due distinti integrali multipli in una eccellente Memoria che venne premiata nel 1840 dall' Accademia reale del Belgio, e in cui cercò di stendere agl' integrali Abeliani due proprietà scoperte da Legendre, delle funzioni ellittiche, cioè la relazione tra le funzioni complete di prima e seconda specie a moduli completivi, e la riduzione delle funzioni complete di terza specie a funzioni complete e incomplete di prima e

(*) Il soggetto dei §§. 1 e 2 di questa Memoria fu esposto alla *Società delle conferenze tecniche* di Torino nell' adunanza del 21 luglio 1853. Vedi il giornale torinese *Rivista delle Università e dei Collegi*, N.° 30 (28 luglio 1853).

seconda; se non che dedusse bensì da uno de'suoi integrali multipli la citata relazione tra le funzioni ellittiche di prima e seconda specie, ma dall'altro ottenne solamente una relazione tra due funzioni complete di terza specie che si verifica per mezzo dei due teoremi di Legendre, in modo che la proprietà degl'integrali Abeliani corrispondente alla riduzione delle funzioni ellittiche complete di terza specie è soltanto presupposta dalla formula del Signor Catalan, il quale anzi la reputava difficile ad enunciarsi esplicitamente. Nel fine della sua Memoria l'egregio autore indicò pure come si applichi lo stesso metodo ad altre funzioni trascendenti, e un'applicazione dissimile accennò il Signor William Roberts in una Nota del 24 febbraio 1851, stampata nel giornale di Liouville tom. 16, p. 143, ove si valse della trasformazione d'un integrale multiplo per dimostrare un elegante teorema di Abel.

Alcune ricerche del genere fin quì esposto sono l'argomento di questo scritto. Per mezzo di trasformazioni assai facili riduco dapprima ad espressioni in termini finiti o ad integrali semplici parecchi integrali multipli, di cui taluno forse non fu ancora avvertito; poscia trasformo con la sostituzione delle coordinate ellittiche uno di siffatti integrali, e da questo solo, assumendo pei limiti un'equazione di forma più generale che non è la usata comunemente, ricavo una formula che comprende come casi particolari ambedue i teoremi di Legendre sopra le funzioni ellittiche complete di prima e seconda specie, e sopra la riduzione delle funzioni ellittiche complete di terza specie, e inoltre anche quella proprietà delle funzioni incomplete di terza specie che Jacobi chiama della *permutazione del parametro coll' argomento*. Dimostro da ultimo altre proposizioni d'una generalità maggiore, delle quali, stante la equazione dei limiti di cui fo uso, non sono se non corollarj speciali il teorema diansi ricordato di Abel, e le ampliazioni indicate dai Signori Catalan e Roberts.

§. 1.

Riduzione d' alcuni integrali multipli.

1.° Siano primieramente n variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$ collegate dall'equazione

$$(1) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 ,$$

φ una funzione di tali variabili, e considerando come indipendenti le prime $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, abbiasi l'integrale multiplo

$$\int \varphi dx_1 \, dx_2 \ldots dx_{n-1}$$

(che indico per semplicità di scrittura con una sola $\int$), steso a tutti i valori delle stesse variabili che soddisferanno all' equazione (1).

Trasformiamo quest' integrale sostituendo alle variabili x_i altre n variabili $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, y_n$ collegate dall'equazione

$$(2) \qquad y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1 ,$$

e le cui relazioni con le primitive siano

$$(3) \qquad a_1 x_1 = \rho y_1 , \quad a_2 x_2 = \rho y_2 , \ldots \quad a_n x_n = \rho y_n ,$$

dove $a_1, a_2, \ldots a_n$ indicano quantità costanti ed è

$$(4) \qquad \rho = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n .$$

Potremo quì far uso delle formule e regole note, ma sarà più semplice procedere come segue. Cominciamo dal risguardare ρ come una nuova variabile che si debba sostituire alla variabile primitiva x_{n-1}: le formule (1) e (4) daranno

$$\rho = a_n + (a_1 - a_n) x_1 + (a_2 - a_n) x_2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n) x_{n-1} ,$$

e supponendo che l'integrazione si eseguisca prima in ordine ad x_{n-1} si dovranno considerare come costanti $x_1, x_2, \ldots x_{n-2}$, onde si avrà

$$d\rho = (a_{n-1} - a_n) dx_{n-1} ;$$

sostituiti poi questi valori di x_{n-1} e dx_{n-1}, le variabili indipendenti nell'integrale proposto saranno x_1, x_2, ... x_{n-2}, ρ; e se ora si vogliono surrogare y_1, y_2, ... y_{n-2} ordinatamente ad x_1, x_2, ... x_{n-2}, dovrà considerarsi come costante ρ, sicchè le prime $n - 2$ delle formule (3) daranno

$$a_1 dx_1 = \rho dy_1 , \quad a_2 dx_2 = \rho dy_2 , \ldots a_{n-2} dx_{n-2} = \rho dy_{n-2} ,$$

e se ne dedurrà

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-2}(a_{n-1} - a_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-2} \, dx_{n-1}$$
$$= \rho^{n-2} dy_1 \, dy_2 \ldots dy_{n-2} \, d\rho .$$

Finalmente nell'integrale così trasformato si sostituisca la variabile y_{n-1} alla variabile ρ: per mezzo delle equazioni (1) e (3) si trova

$$\rho\left(\frac{y_1}{a_1} + \frac{y_2}{a_2} + \ldots + \frac{y_n}{a_n}\right) = 1 ,$$

onde

$$(5) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{y_1}{a_1} + \frac{y_2}{a_2} + \ldots + \frac{y_n}{a_n} ,$$

e per mezzo della (2) questa diviene

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{a_n} + \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) y_1 + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_n}\right) y_2 + \ldots$$
$$+ \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) y_{n-1} ;$$

dovendosi adunque considerare y_1, y_2, ... y_{n-2} come costanti, ne risulterà

$$-\frac{d\rho}{\rho^2} = \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) dy_{n-1} ,$$

ossia

$$d\rho = \frac{a_{n-1} - a_n}{a_{n-1} \, a_n} \rho^2 \, dy_{n-1} ,$$

e perciò, mettendo questo valore di $d\rho$ nell'equazion precedente, e moltiplicando ambedue i membri per $\frac{a_{n-1}\,a_n}{a_{n-1}-a_n}$,

(6) $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}\, a_n . dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1} = \rho^n . dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}$,

formula che servirà alla trasformazione cercata.

In secondo luogo poniamo che la relazione tra le variabili primitive x_1, x_2, . . . x_n sia

(7) $$x^2_1 + x^2_2 + \ldots + x^2_n = 1,$$

e che la relazione tra le nuove variabili y_1, y_2, . . . y_n sia similmente

(8) $$y^2_1 + y^2_2 + \ldots + y^2_n = 1,$$

ritenendo del resto le equazioni (3) per collegare le y_i alle x_i : è chiaro che alle formule (4) e (5) subentreranno le seguenti

(9) $$\rho^2 = a^2_1\, x^2_1 + a^2_2\, x^2_2 + \ldots + a^2_n\, x^2_n,$$

(10) $$\frac{1}{\rho^2} = \frac{y^2_1}{a^2_1} + \frac{y^2_2}{a^2_2} + \ldots + \frac{y^2_n}{a^2_n},$$

e che per ottenere la formula di trasformazione, basterà nell'equazione (6) cambiare ρ in ρ^2, e generalmente a_i in a^2_i, x_i in x^2_i, y_i in y^2_i. Ciò fatto e avendo riguardo alle (3) si trova

(11) $a_1 a_2 \ldots a_{n-1} . a^2_n . dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1} = \rho^{n+1} . dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1}$.

2.° Da questa formula possiamo immediatamente dedurre il valore dell'integrale multiplo

$$\int \frac{dx_1\, dx_2 \ldots\ldots dx_{n-1}}{\rho^{n+1}},$$

steso a tutti i valori positivi (non escluso il valor zero) di x_1, x_2, . . x_n che soddisfanno all'equazione (7), intendendo che ρ sia determinato dall'equazione (9). Posto infatti che

anche le costanti a_1 , a_2 , ... a_n siano positive, le nuove variabili y_1 , y_2 , . . . y_n dovranno prendere tutti i valori positivi o nulli che soddisfanno all'equazione (8) ,e dalla (11) si avrà

$$\int \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}}{\rho^{n+1}} = \frac{1}{a^2_n} \frac{1}{a_1\, a_2 \ldots a_{n-1}} \int dy_1\, ,\, dy_2 \ldots dy_{n-1},$$

ora l'equazione (8) darà pei limiti dell' integrale multiplo $\int dy_1\, dy_2 \ldots . dy_{n-1}$ la condizione $y^2_1 + y^2_2 + \ldots + y^2_{n-1}$ $<$ oppure $= 1$, ed è noto che sotto questa condizione si ha

$$(12) \qquad \int dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1} = \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \, :$$

dunque

$$(13) \quad \int \frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1}}{\rho^{n+1}} = \frac{1}{a^2_n} \frac{1}{a_1\, a_2 \ldots a_{n-1}} \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \, .$$

Facciamo per compendio

$$P_\lambda = \int \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}}{\rho^{2\lambda}}, \qquad Q_\lambda = \int \frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1}}{(1 + t^2\rho^2)^\lambda} \, ,$$

supponendo stesi anche questi integrali a tutti i valori positivi di x_1 , x_2 , . . . x_n che verificano l'equazione (7), e chiamando t una quantità indipendente dalle variabili x_i . La formula (13) darà il valore di $P_{\frac{1}{2}(n+1)}$, e d' altra parte è chiaro, che in generale dal valore di P_λ si deduce quello di Q_λ col solo cambiare a^2_1 , a^2_2 , . . . a^2_n in

$$1 + a^2_1 t^2 , \quad 1 + a^2_2 t^2 , \; \ldots \; 1 + a^2_n t^2 ,$$

poichè, a motivo delle equazioni (7) e (9), con un tal cambiamento si passa da ρ^2 ad $1 + t^2\rho^2$.

Ora se in luogo d'ogni costante a^2_i mettiamo $a^2_i + v$, e dopo aver moltiplicati per dv i due membri dell' equazione

(13), integriamo da $v=0$ a $v=\infty$, ρ^{n+1} si cambierà in $(\rho^2+v)^{\frac{n+1}{2}}$, e avendosi

$$\int_0^\infty \frac{dv}{(\rho^2+v)^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{2}{n-1}\,\frac{1}{\rho^{n-1}},$$

il primo membro si ridurrà a

$$\frac{2}{n-1}\,P_{\frac{1}{2}(n-1)},$$

dal che conchiuderemo

$$(14)\quad P_{\frac{1}{2}(n-1)} = \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{1}{a^2_n+v}\,\frac{dv}{\sqrt{[(a^2_1+v)(a^2_2+v)\dots(a^2_{n-1}+v)]}}.$$

La formula di trasformazione (11) somministra pure

$$\int \rho^2 dy_1 dy_2 \dots dy_{n-1} = a_1 a_2 \dots a_{n-1}.\, a^2_n. \int \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1}}{\rho^{n-1}},$$

ove nel primo membro si deve a ρ sostituire il valore dato dalla formula (10), e nel secondo invece quello che è dato dalla (9). Si avrà dunque, per la (14),

$$\int \frac{dy_1 dy_2 \dots dy_{n-1}}{\frac{y^2_1}{a^2_1}+\frac{y^2_2}{a^2_2}+\dots+\frac{y^2_n}{a^2_n}}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{1}{1+\frac{v}{a^2_n}}\,\frac{dv}{\sqrt{\left(1+\frac{v}{a^2_1}\right)\left(1+\frac{v}{a^2_2}\right)\dots\dots\left(1+\frac{v}{a^2_{n-1}}\right)}},$$

ossia, cambiando generalmente $\frac{1}{a^2_i}$ in a^2_i, y_i in x_i.

$$(15)\quad P_1 = \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{1}{1+a^2_n v}\,\frac{dv}{\sqrt{[(1+a^2_1 v)(1+a^2_2 v)\dots(1+a^2_{n-1} v)]}}.$$

Sono così ridotti ad integrali semplici gl'integrali multipli $P_{\frac{1}{2}(n-1)}$ e P_1 da cui si potranno dedurre $Q_{\frac{1}{2}(n-1)}$ e Q_1 : cerchiamo ora di esprimere similmente l'integrale $\int_0^\infty Q_\lambda\, dt$.

Posto $\frac{1}{1+t^2\rho^2} = u$, abbiamo

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2\rho^2)^\lambda} = \frac{1}{2\rho}\int_0^1 u^{\lambda-\frac{3}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2\rho}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\lambda-\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda)},$$

semprechè λ sia maggiore di $\frac{1}{2}$, e quindi

$$(16)\qquad \int_0^\infty Q_\lambda\, dt = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\lambda-\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda)}.P_{\frac{1}{2}},$$

essendo

$$\int\frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}}{\rho} = P_{\frac{1}{2}}.$$

Adunque tutto dipende dal valore di $P_{\frac{1}{2}}$, per determinarlo, prenderemo il valore di $P_{\frac{1}{2}(n+1)}$ dato dalla formula (13), e dedotto da esso quello di $Q_{\frac{1}{2}(n+1)}$, lo sostituiremo nella (16) facendovi $\lambda = \frac{1}{2}(n+1)$; per essere $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, otterremo

$$(17)\quad P_{\frac{1}{2}} = \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^{n-2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty \frac{1}{1+a^2{}_n t^2}\;\frac{dt}{\sqrt{[(1+a^2{}_1t^2)(1+a^2{}_2t^2)..(1+a^2{}_{n-1}t^2)]}},$$

Per mezzo di cui la (16) ci darà $\int_0^\infty Q_\lambda\, dt$ ogni qualvolta λ sia superiore ad $\frac{1}{2}$.

Dai valori P_1 e $P_{\frac{1}{2}}$ è facile passare a quelli di $P_{\mu+1}$ e $P_{\mu+\frac{1}{2}}$, per tutti i valori interi e positivi di μ, giacchè se pongasi

$$a^2{}_i = b^2{}_i + k, \quad \text{e} \quad \sigma^2 = b^2{}_1 x^2{}_1 + b^2{}_2 x^2{}_2 \ldots + b^2{}_n x^2{}_n,$$

si ha

$$\rho^2 = \sigma^2 + k,$$

e quindi basta differenziare una o più volte rispetto a k per passare da P_1 e $P_{\frac{1}{2}}$ a $P_{\mu+1}$ e $P_{\mu+\frac{1}{2}}$. Determinati questi, si avranno poi immediatamente $Q_{\mu+1}$ e $Q_{\mu+\frac{1}{2}}$.

3.° Il metodo precedente può adoperarsi anche in ordine ad altri integrali, e specialmente a quelli di cui s' è occupato il Sig. W. Roberts nel tomo XI del giornale di Liouville, pag. 201; e con esso si dimostreranno in una maniera più spedita, e tanto pel caso di n impari quanto pel caso di n pari, alcune formule notabili ivi da quel distinto geometra ottenute pei soli valori pari di n: così, anche per le funzioni dinotate con Y_p dal Signor Roberts, si troverà un' equazione analoga alla (16), la quale servirà a ridurre l'integrale $\int_0^\infty Y_p dm$ non solo per n pari e per valori interi di p, come nella citata sua Nota, ma eziandio per n impari e per valori di p rotti o irrazionali. Del resto, giungeremo più oltre a risultamenti assai più generali: intanto mostrerò come quel metodo guidi alla riduzione d'un integrale multiplo trattato dal Signor Catalan nel giornale or mantovato, tom. IV, p. 333.

Nella formula (17) si faccia

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0, \quad a_n = 1:$$

si avrà

$$\rho = x_n, \quad P_{\frac{1}{2}} = \int \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}}{x_n}$$

e l'integrale contenuto nel secondo membro diverrà

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2},$$

onde risulterà l'equazione nota

$$(18) \qquad \int \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}}{x_n} = 2\, \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} .$$

Di più, la formula (11) e l'equazione $a_n x_n = \rho y_n$ somministrano

$$\int \frac{dx_1\, dx_2 .. dx_{n-1}}{x_n\, \rho^n} = \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} \int \frac{dy_1 dy_2 \ldots dy_{n-1}}{y_n} ,$$

e l'integrale multiplo contenuto nel secondo membro di questa equazione è determinato dall'antecedente equazione (18), cosicchè se ne deduce il teorema di Jacobi

$$(19) \qquad \int \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}}{x_n\, \rho^n} = \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} \, \frac{2(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} .$$

In questa formula si sostituisca generalmente $1 + a^2_i\, t^2$ ad a^2_i, il che muterà ρ^2 in $1 + t^2 \rho^2$, e ponendo per compendio

$$R = (1 + a^2_1\, t^2)(1 + a^2_2\, t^2) \ldots (1 + a^2_n\, t^2) ,$$

si trarrà dalle formule (18) e (19)

$$\int \left(1 - \frac{1}{(1+t^2\rho^2)^{\frac{n}{2}}}\right) \frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1}}{x_n} = \frac{2(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{R}}\right).$$

Finalmente si moltiplichino i membri di questa equazione per $\frac{dt}{t^2}$ e s'integrino fra i limiti $t = 0$, $t = \infty$: l'integrazione per parti darà primieramente

$$\int \left(1 - \frac{1}{(1+t^2\rho^2)^{\frac{n}{2}}}\right) \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{(1+t^2\rho^2)^{\frac{n}{2}}}\right)$$

$$+ n\rho^2 \int \frac{dt}{(1+t^2\rho^2)^{\frac{n}{2}+1}} ,$$

$$\int\left(1-\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}\left(1-\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$$

$$+\int\left(\frac{a_1^2}{1+a_1^2t^2}+\frac{a_2^2}{1+a_2^2t^2}+\ldots+\frac{a_n^2}{1+a_n^2t^2}\right)\frac{dt}{\sqrt{R}},$$

e poscia se ne conchiuderà

$$\int_0^\infty\left(1-\frac{1}{(1+t^2\rho^2)^{\frac{n}{2}}}\right)\frac{dt}{t^2}$$

$$=n\rho^2\int_0^\infty\frac{dt}{(1+t^2\rho^2)^{\frac{n}{2}+1}}=n\rho\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

$$\int_0^\infty\left(1-\frac{1}{\sqrt{R}}\right)\frac{dt}{t^2}$$

$$=\int_0^\infty\left(\frac{a_1^2}{1+a_1^2t^2}+\frac{a_2^2}{1+a_2^2t^2}+\ldots+\frac{a_n^2}{1+a_n^2t^2}\right)\frac{dt}{\sqrt{R}};$$

inoltre si ha

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,,\qquad \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{n}{2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right):$$

sostituendo si otterrà dunque

$$(20)\left\{\begin{aligned}&\int\frac{\rho}{x_n}\,dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_{n-1}\\&=\frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\int_0^\infty\left(\frac{a_1^2}{1+a_1^2t^2}+\frac{a_2^2}{1+a_2^2t^2}+\ldots+\frac{a_n^2}{1+a_n^2t^2}\right)\frac{dt}{\sqrt{R}}.\end{aligned}\right.$$

Questa formula, che nel caso di n pari s'accorda con la (18) del Sig. Roberts (tom. cit. p. 208), esprime l'accennato integrale multiplo, come si vedrà facendo

$$a_n = 1\,, \quad a^2_i = 1 - \alpha^2_i\,,$$

poichè si avrà

$$x_n = \sqrt{(1 - x^2_1 - x^2_2 - \ldots - x^2_{n-1})}\,,$$

$$\rho = \sqrt{(1 - \alpha^2_1 x^2_1 - \alpha^2_2 x^2_2 - \ldots - \alpha^2_{n-1} x^2_{n-1})}\,;$$

ma non lo esprime nella forma che trovò il Signor Catalan. Per ottenerlo sotto questa forma, si ponga

$$R' = (1 + a^2_1 t^2)(1 + a^2_2 t^2) \ldots (1 + a^2_{n-1} t^2)\,,$$

onde

$$R = (1 + a^2_n t^2)R',$$

e si osservi che

$$\int \frac{dt}{t^2\sqrt{(1 + a^2_n t^2)}} = -\frac{\sqrt{(1 + a^2_n t^2)}}{t} + \text{costante:}$$

se ne dedurrà col mezzo dell'integrazione per parti

$$\int \left(1 - \frac{1}{\sqrt{R}}\right)\frac{dt}{t^2} = \int \left(\frac{dt}{t^2} - \frac{dt}{t^2\sqrt{(1+a^2_n t^2)}}\,\frac{1}{\sqrt{R'}}\right)$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{\sqrt{(1 + a^2_n t^2)}}{t\sqrt{R'}}$$

$$+ \int \left(\frac{a^2_1}{1 + a^2_1 t^2} + \frac{a^2_2}{1 + a^2_2 t^2} + \ldots + \frac{a^2_{n-1}}{1 + a^2_{n-1} t^2}\right)\frac{dt\sqrt{(1 + a^2_n t^2)}}{\sqrt{R'}}\,;$$

e quindi

$$\int_0^\infty \left(1 - \frac{1}{\sqrt{R}}\right)\frac{dt}{t^2}$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{a^2_1}{1 + a^2_1 t^2} + \frac{a^2_2}{1 + a^2_2 t^2} + \ldots + \frac{a^2_{n-1}}{1 + a^2_{n-1} t^2}\right)\frac{dt\sqrt{(1 + a^2_n t^2)}}{\sqrt{R'}}\,;$$

$$\int \frac{\rho}{x_n}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \int_0^\infty \left(\frac{a^2_1}{1 + a^2_1 t^2} + \frac{a^2_2}{1 + a^2_2 t^2} + \ldots + \frac{a^2_{n-1}}{1 + a^2_{n-1} t^2}\right)\frac{dt\sqrt{(1 + a^2_n t^2)}}{\sqrt{R'}}\,;$$

facendo poi

$$a_n = 1, \quad a^2_i = 1 - \alpha^2_i, \quad t^2 = \frac{1}{v^2 - 1},$$

si troverà la formula del Sig. Catalan

$$(21)\left\{\begin{aligned}&\int dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1} \sqrt{\left[\frac{1-\alpha^2_1 x^2_1 - \alpha^2_2 x^2_2 - \ldots - \alpha^2_{n-1} x^2_{n-1}}{1 - x^2_1 - x^2_2 - \ldots - x^2_{n-1}}\right]} \\ &\quad = \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \int_0^\infty \left(\frac{1-\alpha^2_1}{v^2-\alpha^2_1} + \frac{1-\alpha^2_2}{v^2-\alpha^2_2}\right. \\ &\left. + \ldots + \frac{1-\alpha^2_{n-1}}{v^2-\alpha^2_{n-1}}\right) \frac{v^2(v^2-1)^{\frac{n-3}{2}}\, dv}{\sqrt{[(v^2-\alpha^2_1)(v^2-\alpha^2_2)\ldots(v^2-\alpha^2_{n-1})]}}\,.\end{aligned}\right.$$

L'integrale multiplo quì considerato riducesi nel caso di $n = 3$ a quello che si ottiene cercando la misura della superficie totale d'un ellissoide ad assi ineguali, ed in particolare la formula (20) offre l'espressione di quest' area quale la diede il Signor Cayley nel tomo XIII del giornale di Liouville, p. 267, formula (17), sicchè trovansi così ravvicinate l'espressione del Sig. Catalan e quella del Sig. Cayley.

4.° Quantunque si conoscano altre dimostrazioni delle formule (12) e (18), voglio nondimeno per la sua semplicità riferirne una, che si applica ad una formula più generale, e che può considerarsi come affatto elementare, poichè consiste nell'effettuare l'integrazione rispetto ad ognuna delle variabili.

Sia proposto l'integrale multiplo

$$\int x_n^{m_n-1} . x_1^{m_1-1} dx_1 . x_2^{m_2-1} dx_2 \ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-1} dx_{n-1} = \mathrm{V}$$

steso a tutti i valori positivi (o nulli) di $x_1, x_2, \ldots . x_n$ che verificano l'equazione (1), intendendo che gli esponenti $m_1, m_2, \ldots m_n$ siano tutti maggiori di zero. Comincian-

do l'integrazione dalla variabile x_1, faremo per brevità

$$1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_{n-1} = p_1\,,$$

il che dà

$$x_n = p_1 - x_1\,,$$

e dovremo integrare da $x_1 = 0$ ad $x_1 = p_1$, l'espressione

$$(p_1 - x_1)^{m_n - 1} . x_1^{m_1 - 1} dx_1 :$$

posto $x_1 = p_1 v$, avremo

$$\int_0^{p_1} (p_1 - x_1)^{m_n - 1} . x_1^{m_1 - 1} dx_1 = p_1^{m_n + m_1 - 1} . \int_0^1 (1 - v)^{m_n - 1} . v^{m_1 - 1} dv$$

$$= p_1^{m_n + m_1 - 1} \frac{\Gamma(m_n)\,\Gamma(m_1)}{\Gamma(m_n + m_1)}\,,$$

e quindi

$$V = \frac{\Gamma(m_n)\,\Gamma(m_1)}{\Gamma(m_n + m_1)} \int p_1^{m_n + m_1 - 1} . x_2^{m_2 - 1} dx_2 \ldots x_{n-1}^{m_{n-1} - 1} dx_{n-1}\,.$$

Integreremo poi rispetto ad x_2, facendo

$$1 - x_3 - \ldots - x_{n-1} = p_2\,,$$

e però

$$p_1 = p_2 - x_2\,,$$

e stendendo l'integrazione da $x_2 = 0$ ad $x_2 = p_2$; finchè per essere

$$\int_0^{p_2} (p_2 - x_2)^{m_n + m_1 - 1} . x_2^{m_2 - 1} dx_2 = p_2^{m_n + m_1 + m_2 - 1} . \frac{\Gamma(m_n + m_1)\Gamma(m_2)}{\Gamma(m_n + m_1 + m_2)}\,,$$

troveremo

$$V = \frac{\Gamma(m_n)\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)}{\Gamma(m_n + m_1 + m_2)} \int p_2^{m_n + m_1 + m_2 - 1} . x_3^{m_3 - 1} dx_3 \ldots x_{n-1}^{m_{n-1} - 1} dx_{n-1}\,.$$

Proseguiremo facendo

$$1 - x_4 - \ldots - x_{n-1} = p_3\,,$$

onde $p_2 = p_3 - x_3$, e integrando rispetto ad x_3 fra i limiti $x_3 = 0$, $x_3 = p_3$; poscia integreremo similmente rispetto ad x_4, x_5, . . . , ed è chiaro che, così operando, giungeremo infine ad un integrale semplice della forma

$$\int p_{n-2}^{\mu-1} . x_{n-1}^{m_{n-1}-1} dx_{n-1} ,$$

dove sarà

$$p_{n-2} = 1 - x_{n-1} , \mu = m_n + m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-2} ,$$

e che dovremo stendere fra i limiti

$$x_{n-1} = 0 , \quad x_{n-1} = 1 ,$$

onde il suo valore sarà

$$\frac{\Gamma(\mu)\Gamma(m_{n-1})}{\Gamma(\mu + m_{n-1})} :$$

avrem dunque

$$V = \frac{\Gamma(m_n)\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_{n-1})}{\Gamma(\mu + m_{n-1})} ,$$

ossia, rimettendo il valore di V e di μ,

$$(22) \left\{ \begin{aligned} &\int x_n^{m_n-1} . x_1^{m_1-1} dx_1 , x_2^{m_2-1} dx_2 \ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-1} dx_{n-1} \\ &\qquad = \frac{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2) \ldots \Gamma(m_n)}{\Gamma(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)} , \end{aligned} \right.$$

equazione che si riduce ad un teorema ben noto del Sig. Dirichlet nel caso particolare di $m_n = 1$.

Questa formula porgerà la (12) se si prende

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_{n-1} = \frac{1}{2} , \quad m_n = 1,$$

e se si cambia x_i in y^2_i, e porgerà la (18), se si prende

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_{n-1} = m_n = \frac{1}{2} ,$$

e si cambia x_i in x^2_i.

Trattiamo con lo stesso procedimento l'integrale

$$V=\int x_1^{m_1-1}dx_1.x_2^{m_2-1}dx_2\ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-1}dx_{n-1}\,.\,\varphi(x_n)dx_n\,,$$

in cui sono n variabili indipendenti x_1, x_2, ... x_n; $\varphi(x_n)$ indica una funzione qualsivoglia di x_n, e m_1, m_2, ..., m_{n-1} dinotano quantità tutte maggiori di zero, e che debba esser steso a tutti i valori positivi o nulli di tali variabili pei quali si avrà

$$x_1+x_2+\ldots+x_n<1\,,\quad \text{oppure}\quad =1.$$

Lasciando per ultima l'integrazione relativa alla variabile x_n, ridurremo V alla forma

$$V=\frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_{n-1})}{\Gamma(1+m)}\int p_{n-1}^m\varphi(x_n)dx_n\,,$$

dove sarà

$$p_{n-1}=1-x_n\,,\quad m=m_1+m_2+,\ldots+m_{n-1}\,,$$

e resterà da integrare rispetto ad x_n tra i limiti $x_n=0$, $x_n=1$. Poniamo

$$\int_0^x\varphi(x)dx=\psi(x):$$

avremo, integrando per parti,

$$\int_0^1(1-x_n)^m\,\varphi(x_n)dx_n=m\int_0^1(1-x_n)^{m-1}\;\psi(x_n)dx_n\,,$$

ossia

$$\int_0^1(1-x_n)^m\,\varphi(x_n)dx_n=m\int_0^1 t^{m-1}\,F(t)\,dt\,,$$

fatto

$$1-x_n=t\,,\quad \psi(1-t)=F(t)\,,$$

e quindi, per essere

$$\Gamma(1+m)=m\Gamma(m)\,,$$

ne trarremo

$$V = \frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_{n-1})}{\Gamma(m)}\int_0^1 t^{m-1}\,F(t)dt\,.$$

Ora se volessimo all'incontro cominciare l'integrazione dalla variabile x_n, dovremmo integrar l'espressione $\varphi(x_n)dx_n$ tra i limiti

$$x_n = 0\,;\quad x_n = 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}\,,$$

il che ci darebbe

$$\int\varphi(x_n)dx_n = \psi(1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1})$$
$$= F(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})\,,$$

e perciò

$$V = \int F(x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_{n-1}).\, x_1^{m_1-1}dx_1 . x_2^{m_2-1}dx_2 \ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-1}dx_{n-1}\,,$$

e resterebbe da determinar questo integrale multiplo a $n-1$ variabili positive (o nulle) e soggette a verificar la condizione

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} < 1\,,\quad \text{oppure} = 1\,,$$

Paragonando i due valori di V, conchiuderemo dunque

$$(23)\left\{\begin{aligned} &\int F(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}).x_1^{m_1-1}dx_1\,.\; x_2^{m_2-1}dx_2 \ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-1}dx_{n-1} \\ &\quad = \frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\ldots\ldots\Gamma(m_{n-1})}{\Gamma(m)}\int_0^1 t^{m-1}\,F(t)dt\,. \end{aligned}\right.$$

Si ha per le convenzioni fatte

$$\psi(0) = 0\,,\quad F(1) = \psi(0) = 0\,,$$

ma la formula 23 vale anche per una funzione $F(x)$ che non si annulli quando $x = 1$. Ciò si proverà sostituendo

$$F(x) - F(1) \quad \text{a} \quad F(x)\,,$$

sommando poi con questa formula la (22) moltiplicata per F(1), dopo avervi fatto $m_n = 1$, e avvertendo che

$$\frac{1}{\Gamma(m)}\int_0^1 t^{m-1}\,dt = \frac{1}{m\Gamma(m)} = \frac{1}{\Gamma(m+1)}\ .$$

Otteniamo così in un modo assai semplice un teorema notabilissimo del signor Liouville, che comprende il già ricordato dal signor Dirichlet, e anche la precedente formula (22).

§. 2.

Teoremi intorno agl' integrali Abeliani.

5.° Le trasformazioni sin qui adoperate ci hanno condotti a determinare l'integrale multiplo proposto, o sotto forma finita, o per mezzo d' un integrale semplice. La trasformazione che ora useremo, e che è un' ampliazione per qualsivoglia numero di variabili della sostituzione delle *coordinate ellittiche* introdotte pel caso di tre variabili dal Sig. Lamé, ridurrà l'integrale proposto ad una somma di prodotti d'integrali semplici; e il paragone de'risultamenti ottenuti nell'uno e nell' altro modo somministrerà teoremi che sembrano di molta importanza.

Seguirò la via tracciata dal Signor Catalan nella sua Memoria già citata, e mi varrò delle formule da lui stabilite (V. *Mém. couronnés par l'Acad. R. de Belgique, tom. XIV, 2.e partie*). Il Sig. Catalan considera gl'integrali (12) e (21) dianzi determinati: io prenderò a trasformare l'integrale

$$V = \int \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}}{x_n}\ ,$$

che nel caso di $n = 3$ è il medesimo di cui si occupò primo il Signor Lamé, ma in luogo di stenderlo, com'egli fa, a tutti i valori reali delle variabili x_1, x_2, ... x_n, nella

quale ipotesi il suo valore è dato dalla formula (18), prenderò però pei limiti un'equazione più generale, e desumerò la sua espressione dalla formula (17).

Sia pertanto x_n una funzione di $n-1$ variabili x_1, x_2, ... x_{n-1} determinata dall'equazione

$$(24)\qquad \frac{x_1^2}{a^2-a_1^2}+\frac{x_2^2}{a^2-a_2^2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{a^2-a_{n-1}^2}+\frac{x_n^2}{a^2-a_n^2}$$

dove a, a_1, a_2, ... a_n indicano costanti date, e debbasi stendere l'integrale multiplo V a tutti i valori nulli o positivi di x_1, x_2, ... x_{n-1} che soddisfacciano alla condizione

$$(25)\qquad \frac{x_1^2}{h_1^2}+\frac{x_2^2}{h_2^2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{h_{n-1}^2}<1\text{ , ovvero }=1,$$

dinotando con h_1, h_2, ... h_{n-1} altre costanti. Si supponga

$$a_1^2<a_2^2<\ldots<a_n^2<a^2,$$

e h_i^2 non maggiore di $a^2-a_i^2$ per tutti i valori $i=1, 2,$ ... $n-1$, onde il primo membro dell'equazione (24) avrà tutti i suoi termini positivi, e x_n sarà sempre reale finchè s'adempie la condizione (25), vale a dire per tutta l'estensione dell'integrale; supporremo di più, che dei due valori di x_n si usi sempre il positivo. Per ottenere l'espressione di V, faremo generalmente

$$\frac{x_i}{h_i}=y_i,\qquad 1-\frac{h_i^2}{a^2-a_i^2}=\alpha_i^2,$$

introdurremo una funzione y_n determinata dall'equazione

$$y_1^2+y_2^2+\ldots+y_{n-1}^2+y_n^2=1,$$

e porremo

$$\rho^2=\alpha_1^2\,y_1^2+\alpha_2^2\,y_2^2+\ldots+\alpha_{n-1}^2y_{n-1}^2+\alpha_n^2\,y_n^2,$$

intendendo che sia $\alpha_n=1$: è chiaro che la condizione (25)

si risolverà in quella di y^2_n positivo o nullo, e che l'equazione (24) unita alle ultime due darà

$$\frac{x^2_n}{a^2 - a^2_n} = \rho^2 ;$$

si avrà inoltre

$$dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1} = h_1\, h_2 \ldots h_{n-1} \cdot dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1} ,$$

e quindi, se per brevità poniamo

$$h = \frac{h_1\, h_2 \ldots h_{n-1}}{\sqrt{(a^2 - a^2_n)}} ,$$

V uguaglierà l' integrale multiplo $\int \frac{dy_1\, dy_2 \ldots dy_{n-1}}{\rho}$ steso a tutti i valori positivi di y_1, y_2, ... y_n, (supposte positive le costanti h_1, h_2, ... h_{n-1}), e moltiplicando per h, onde si avrà il suo valore sostituendo generalmente α^2_i ad a^2_i e 1 ad a^2_n in quello di $h.P_{\frac{1}{2}}$ che si trarrà dalla formula (17). Avremo dunque

$$V = h \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^{n-2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} \frac{dt}{\sqrt{([1+\alpha^2_1 t^2)(1+\alpha^2_2 t^2)..(1+\alpha^2_{n-1} t^2)]}}$$

e ponendo

$$t^2 = \frac{v^2}{1-v^2}, \quad k^2_i = \frac{1}{1-\alpha^2_i}, \quad k = h \, . \, k_1\, k_2 \ldots k_{n-1} ,$$

ne dedurremo

$$(26) \quad V = k \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^{n-2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 \frac{(1 - v^2)^{\frac{n}{2}-1} dv}{\sqrt{[k^2_1 - v^2)(k^2_2 - v^2)\ldots(k^2_{n-1} - v^2)]}}$$

nel medesimo tempo sarà

$$k^2_i = \frac{a^2 - a^2_i}{h^2_i},$$

$$k^2 = \frac{1}{a^2 - a^2_n} (a^2 - a^2_1)(a^2 - a^2_2) \dots (a^2 - a^2_{n-1}).$$

Vogliansi ora surrogare alle x_i altre variabili u_i, che siano determinate per mezzo dell'equazione

$$(27) \qquad \frac{x^2_1}{u^2_i - a^2_1} + \frac{x^2_2}{u^2_i - a^2_2} + \dots + \frac{x^2_n}{u^2_i - a^2_n} = 1:$$

se si considera u^2_i come l'incognita, questa equazione avrà n radici, che indicheremo con u^2_1, u^2_2, ... u^2_n, ed è noto che tali radici saranno tutte reali e positive, che una di esse supererà a^2_n, e che le altre si troveranno comprese negl' intervalli

$$\underline{a^2_1} \text{ e } \underline{a^2_2},\ \underline{a^2_2} \text{ e } \underline{a^2_3},\ \dots \underline{a^2_{n-1}} \text{ e } \underline{a^2_n};$$

di più, il confronto delle (24) e (27) mostra che una delle stesse radici sarà a^2, onde supposto

$$u^2_1 < u^2_2 < \dots < u^2_n,$$

avremo

$$u^2_n = a^2, \qquad a^2_i < u^2_i < a^2_{i+1},$$

e potremo prendere come nuove variabili le $n-1$ quantità positive u_1, u_2, ... u_{n-1}. Ciascuna x_i delle antiche variabili si esprime in modo semplice per mezzo delle nuove, poichè, giusta le formule note si ha

$$(28) \qquad x^2_i + \frac{(a^2_i - u^2_1)(a^2_i - u^2_2) \dots (a^2_i - u^2_n)}{(a^2_i - a^2_1)(a^2_i - a^2_2) \dots (a^2_i - a^2_n)} = 0,$$

intendendo che il numeratore della frazione qui scritta con-

tenga n fattori della forma $a^2_i - u^2_l$, e che il denominatore contenga $n-1$ fattori $a^2_i - a^2_l$, ommesso il fattor nullo $a^2_i - a^2_i$. Preso $i=n$, $u_n = a$, si tragga dalla (28) il valore di x_n, e si sostituisca nell'integrale V : si otterrà

$$V = \sqrt{\left(\frac{(a^2_n - a^2_1)(a^2_n - a^2_2)\ldots(a^2_n - a^2_{n-1})}{a^2 - a^2_n}\right)}$$

$$\times \int \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1}}{\sqrt{[(a^2_n - u^2_1)(a^2_n - u^2_2)\ldots(a^2_n - u^2_{n-1})]}}\,;$$

ponendo

$$x_i = z_i \sqrt{\left(\frac{a^2 - a^2_i}{a^2_n - a^2_i}\right)}\,,$$

s'introducano in questa espressione le variabili $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ in luogo delle $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, il che porgerà

$$V = k \int \frac{dz_1\, dz_2 \ldots dz_{n-1}}{\sqrt{[(a^2_n - u^2_1)(a^2_n - u^2_2)\ldots(a^2_n - u^2_{n-1})]}}\,.$$

Ma una tal sostituzione, fatta nella (28), la cambia in

$$(29)\qquad z^2_i + \frac{(a^2_i - u^2_1)(a^2_i - u^2_2)\ldots(a^2_i - u^2_{n-1})}{(a^2_i - a^2_1)(a^2_i - a^2_2)\ldots(a^2_i - a^2_{n-1})} = 0\,,$$

che si vede essere la medesima equazione (28) applicata ad $n-1$ incognite $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ in luogo delle n primitive $x_1, x_2, \ldots x_n$. Le incognite z_i saran dunque collegate in $n-1$ equazioni simili alle n che legano le x_i, e che si hanno dalla (27) attribuendo all'indice i successivamente i valori $1, 2, \ldots n$: si avrà, cioè,

$$\frac{z^2_1}{u^2_i - a^2_i} + \frac{z^2_2}{u^2_i - a^2_2} + \ldots + \frac{z^2_{n-1}}{u^2_i - a^2_{n-1}} = 1,$$

supposto che all' indice i si attribuiscano successivamente i valori $1, 2, \ldots n-1$, e questa stessa equazione legherà le

variabili $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ alle nuove $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$. Siamo pertanto in un caso trattato dal Signor Catalan, e, mercè le formule da lui dimostrate, avremo, per trasformare l' integrale multiplo V, le equazioni

$$(30)\begin{cases} \Delta_l = (u^2_l - a^2_1)(u^2_l - a^2_2)\ldots(u^2_l - a^2_l) \\ \times\ (a^2_{l+1} - u^2_l)(a^2_{l+2} - u^2_l)\ldots(a^2_{n-1} - u^2_l)\,, \\ dz_1\, dz_2 \ldots dz_{n-1} = \dfrac{u_1 du_1 . u_2 du_2 .. u_{n-1}\, du_{n-1}}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_{n-1}}} . \Pi(u^2_l - u^2_{l'}), \end{cases}$$

dove $\Pi(u^2_l - u^2_{l'})$ indica il prodotto di tutte le differenze che si ottengono dal binomio $u^2_l - u^2_{l'}$ assegnando ad l tutti i valori $2, 3, \ldots n-1$, e ad l' tutti i valori interi positivi inferiori ad l, talchè sarà sempre $u^2_l > u^2_{l'}$, e quindi $\Pi(u^2_l - u^2_{l'})$ positivo. Da ciò, facendo $(a^2_n - u^2_l)\Delta_l = R_l$, ossia

$$(31)\begin{cases} R_l = (u^2_l - a^2_1)(u^2_l - a^2_2)\ldots(u^2_l - a^2_l) \\ \times\ (a^2_{l+1} - u^2_l)(a^2_{l+2} - u^2_l)\ldots(a^2_n - u^2_l)\,, \end{cases}$$

onde i prodotti $R_1, R_2, \ldots R_{n-1}$ saranno pure tutti positivi, dedurremo

$$(32)\qquad V = k \int \Pi(u^2_l - u^2_{l'}) \frac{u_1\, d.\, u_2\, du_2 \ldots u_{n-1}\, du_{n-1}}{\sqrt{(R_1 R_2 \ldots R_{n-1}}} .$$

Così l'integrale proposto é trasformato in un altro integrale multiplo, che dipende dalle nuove variabili $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$: si otterrà poi la condizione dei limiti per queste nuove variabili, sostituendo nella (25) i valori di $x^2_1, x^2_2, \ldots x^2_{n-1}$ dati dall'equazione (28).

6.° Le formule (26) e (32) danno

$$(33)\left\{\begin{aligned}&\frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^{n-2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1\frac{(1-v^2)^{\frac{n}{2}-1}dv}{\sqrt{[(k^2_1-v^2)(k^2_2-v^2)\dots(k^2_{n-1}-v^2)]}}\\&=\int\Pi(u^2_l-u^2_{l'})\frac{u_1du_1.u_2du_2\dots u_{n-1}du_{n-1}}{\sqrt{(R_1R_2\dots R_{n-1})}},\end{aligned}\right.$$

equazione che esprime una relazione fra l'integrale multiplo relativo alle variabili u_i, e l'integrale semplice relativo a v. Se col Signor Catalan chiamiamo *integrale Abeliano dell'ordine* i un integrale $\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$, in cui P ed R siano funzioni intere di x^2, e il grado di R rispetto ad x^2 sia i, diremo che l'integrale relativo a v è un integrale definito Abeliano dell' ordine $n-1$ se n é pari, dell' ordine n se n è impari. Quando poi i limiti delle variabili u_i risultino eguali a quantità costanti, allora risolvendo il prodotto $\Pi(u^2_l-u^2_{l'})$ in monomj, si spezzerà il secondo membro dell' equazione (33) in una *somma alternata* di prodotti d' integrali definiti semplici.

Supponiamo $a_1=0$, il che possiamo fare senza diminuire la generalità delle formule : ogni funzione R_i avrà u^2_i per fattore; e scrivendo

$$(34)\quad U_i=(u^2_i-a^2_2)\dots(u^2_i-a^2_i)\times(a^2_{i+1}-u^2_i)\dots(a^2_n-u^2_i),$$

si avrà, per la (31), $R_i=u^2_iU_i$, onde la (33) diverrà

$$(35)\left\{\begin{aligned}&\frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^{n-2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1\frac{(1-v^2)^{\frac{n}{2}-1}dv}{\sqrt{[(k^2_1-v^2)(k^2_2-v^2)\dots(k^2_{n-1}-v^2)]}}\\&=\int\Pi(u^2_l-u^2_{l'})\frac{du_1du_2\dots du_{n-1}}{\sqrt{(U_1U_2\dots U_{n-1})}},\end{aligned}\right.$$

e U_i sarà una funzione intera di u^2_i del grado $n-1$. Quindi nell'ipotesi che i limiti delle variabili u_1, u_2, ... u_{n-1} siano costanti, il secondo membro della (35) si ridurrà ad una *somma alternata* di termini, ciascun dei quali sarà il prodotto di $n-1$ integrali definiti della forma $\int_\alpha^\beta \frac{u^{2p}_i\, du}{\sqrt{U_i}}$, cioé di $n-1$ integrali definiti Abeliani dell'ordine $n-1$.

Il caso più semplice, in cui i limiti delle u_i sono costanti, corrisponde alla supposizione $k_1 = k_2 = ... = k_{n-1} = 1$, che dà $h^2_i = a^2 - a^2_i$. Allora la condizione (25) dei limiti delle x_i, raffrontata coll'equazione (24), si riduce nudamente a $\frac{x^2_n}{a^2 - a^2_n} > 0$, ovvero $= 0$, in guisa che l'integrale V si deve stendere a tutti i valori positivi di x_1, x_2, ... x_{n-1}, che possono soddisfare all' equazione (24). Sostituito il valore di x^2_n dato dalla (28), la condizione dei limiti diverrà

$$\frac{(a^2_n - u^2_1)(a^2_n - u^2_2) \dots (a^2_n - u^2_{n-1})}{(a^2_n - a^2_1)(a^2_n - a^2_2) \dots (a^2_n - a^2_{n-1})} > 0, \text{ ovvero } = 0,$$

e resterà naturalmente adempiuta per tutti i valori di u^2_1, u^2_2, . . . u^2_{n-1}, giacchè questi non possono superare a^2_n. Non vi ha dunque altra restrizione per u^2_i, fuorchè quella di non uscire dai limiti a^2_i è a^2_{i+1}, oltre i quali le variabili x_1, x_2, ... x_{n-1} non sarebbero più reali; del resto potrà u^2_i eguagliare tanto a^2_i quanto a^2_{i+1}, poichè si vedrà dall'equazione (28), che ciò non impedisce alle x_1, x_2,... x_{n-1} d'esser reali. Si conchiuda che i limiti di u^2_i saranno a^2_i e a^2_{i+1}, ossia (supposte positive le a_1, a_2, ... a_n) che le variabili u_1, u_2, . . . u_{n-1} avranno per limiti nelle integrazioni le quantità costanti a_1, d_2, ... a_{n-1}, a_n.

Nello stesso caso il primo membro delle (33) e (35) diviene

$$\frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^{n-2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)}} = \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

il che s'accorda con la formula (18). Ritenuto pertanto $a_1=0$, la (35) prenderà allora la forma

$$(36)\quad \frac{2(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \int_0^{a_2} du_1 \int_{a_2}^{a_3} du_2 \ldots \int_{a_{n-1}}^{a_n} du_{n-1} \frac{\Pi(u_l^2 - u_{l'}^2)}{\sqrt{(U_1 U_2 \ldots U_{n-1})}}$$

talchè si avrà il valore d' una somma alternata di prodotti d'integrali definiti Abeliani dell'ordine $n-1$.

Questo caso è il solo, per quanto io so, che sia stato esaminato fin quì; ma un altro, in cui i limiti delle integrazioni relative alle u_l sono egualmente costanti, si trova cercando di determinare $h_1, h_2, \ldots h_{n-1}$ in modo che la condizione dei limiti per le variabili z_l sia

$$(37)\quad \frac{z_1^2}{b^2-a_1^2} + \frac{z_2^2}{b^2-a_2^2} + \ldots + \frac{z_{n-1}^2}{b^2-a_{n-1}^2} < 1, \text{ ovvero } = 1,$$

denotata con b una costante positiva compresa tra a_{n-1} e a_n. Ora essendo $x_l = \frac{a^2 - a_l^2}{a_n^2 - a_l^2} z_l^2$, è manifesto che la condizione (25) si cambierà nella (37), se prendasi generalmente

$$h_l^2 = \frac{a^2 - a_l^2}{a_n^2 - a_l^2}(b^2 - a_l^2).$$

Ma per conoscere qual sia la condizione dei limiti che dalla (37) risulterà per le variabili u_l, poniamo

$$\varphi(b) = \frac{(b^2-u_1^2)(b^2-u_2^2)\ \ldots\ (b^2-u_{n-1}^2)}{(b^2-a_1^2)(b^2-a_2^2)\ \ldots\ (b^2-a_{n-1}^2)},$$

e spezziamo la frazion razionale $\varphi(b)$ in frazioni semplici : secondo la nota teorica, per cui si effettua un tale spezzamento, è facile vedere che si avrà, ricorrendo al valore di z^2_i dato dalla (29),

$$\varphi(b) = 1 - \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{z^2_i}{b^2 - a^2_i} \,;$$

sicché la condizione (37) si riduce a

$$\varphi(b) > 0\,, \quad \text{ovvero} \quad = 0,$$

cioè

$$\frac{(b^2 - u^2_1)(b^2 - u^2_2) \ldots (b^2 - u^2_{n-1})}{(b^2 - a^2_1)(b^2 - a^2_2) \ldots (b^2 - a^2_{n-1})} > 0\,, \quad \text{ovvero} = 0.$$

Questa condizione è adempita sol che u^2_{n-1} non superi b^2, poichè nessuna delle altre u^2_1, u^2_2, $\ldots u^2_{n-2}$ può superare a^2_{n-1}, e quindi sono tutte inferiori a b^2; se ne concluderà che u_2, u_2, $\ldots$ u_{n-2} si devono prendere tra i limiti costanti a_1 e a_2, a_2 e a_3, ... a_{n-2} e a_{n-1}, tra i quali siffatte quantità trovansi comprese finchè sono reali e positive z^2_1, z^2_2, .. z^2_{n-1}, e che u_{n-1} non potendo esser minore di a_{n-1} si deve prendere tra i limiti a_{n-1} e b. Adunque, supponendo $a_1 = 0$, si avrà per questo caso dalla (35)

$$(38)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})^{n-2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 \frac{(1 - v^2)^{\frac{n}{2}}\, dv}{\sqrt{[(k^2_1 - v^2)(k^2_2 - v^2) \ldots (k^2_{n-1} - v^2)]}} \\ & = \int_0^{a_2} du_1 \int_{a_2}^{a_3} du_2 \ldots \int_{a_{n-1}}^{b} du_{n-1} \frac{\Pi(u^2_l - u^2_{l'})}{\sqrt{(U_1 U_2 \ldots U_{n-1})}}\,, \end{aligned} \right.$$

e sarà nel primo membro

$$k^2{}_i = \frac{a^2 - a^2{}_i}{h^2{}_i} = \frac{a^2{}_n - a^2{}_i}{b^2 - a^2{}_i} \ .$$

Abbiamo così nella formula (38) un nuovo teorema sugl' integrali definiti Abeliani, pel quale, se n é pari, una somma di prodotti d'integrali dell'ordine $n-1$ è ridotta ad un solo integrale del medesimo ordine, e se n è impari, un integrale dell'ordine n è ridotto ad una somma di prodotti d integrali dell'ordine inferiore $n-1$.

7.° Il senso di queste formule si farà più chiaro applicandole ai casi di $n=3$ a $n=4$, nei quali gl'integrali ch' esse contengono si esprimono col mezzo di trascendenti ellittici.

Sia primieramente $n=3$. La formula (36) si cambierà nella seguente

$$\frac{1}{2}\pi = \int_0^{a_2} du_1 \int_{a_2}^{a_3} du_2 \frac{u^2{}_2 - u^2{}_1}{\sqrt{([a^2{}_2-u^2{}_1)(a^2{}_3-u^2{}_1)(u^2{}_2-a^2{}_2)(a^2{}_3-u^2{}_2)]}}$$

in cui si riconosce precisamente l'integrale duplicato già tolto in esame dai Signori Lamé, Poisson, ec., e che è noto esprimere la relazione

$$\frac{1}{2}\pi = \mathrm{F}(c)\,\mathrm{E}(c') + \mathrm{F}(c')\,\mathrm{E}(c) - \mathrm{F}(c)\,\mathrm{F}(c')$$

trovata da Legendre fra le funzioni ellittiche complete di prima e seconda specie a moduli completivi.

Nel medesimo caso la formula (38) diviene

$$\int_0^1 \frac{dv\sqrt{(1-v^2)}}{\sqrt{[(k^2{}_1 - v^2)(k^2{}_2 - v^2)]}}$$

$$= \int_0^{a_2} du_1 \int_{a_2}^{b} du_2 \frac{u^2{}_2 - u^2{}_1}{\sqrt{[(a^2{}_2-u^2{}_1)(a^2{}_3-u^2{}_1)(u^2{}_2-a^2{}_2)(a^2{}_3-u^2{}_2)]}}$$

facciasi

$$u^2_1 = a^2_2 \,\mathrm{sen}^2\varphi\,, \quad \frac{a^2_3 - u^2_2}{u^2_2 - a^2_2} = \mathrm{tang}^2\psi\,,$$

$$\frac{a^2_2}{a^2_3} = c^2, \quad \frac{a^2_3 - a^2_2}{a^2_3} = 1 - c^2 = c'^2\,, \quad \frac{a^2_3 - b^2}{b^2 - a^2_2} = \mathrm{tang}^2\theta:$$

effettuata la sostituzione, e adoperando la consueta scrittura delle funzioni ellittiche, il secondo membro della precedente equazione si metterà, per mezzo dell' accennato teorema di Legendre, sotto la forma

$$\frac{1}{2}\pi + \mathrm{F}(c)\,\mathrm{F}(c', \theta) - \mathrm{E}(c)\,\mathrm{F}(c', \theta) - \mathrm{F}(c)\,\mathrm{E}\,(c', \theta).$$

Ma si avrà

$$b^2 = a^2_3(1 - c'^2\mathrm{sen}^2\theta)\,, \quad b^2 - a^2_2 = (a^2_3 - a^2_2)\cos^2\theta\,,$$

e perciò

$$k^2_1 = \frac{1}{1 - c'\mathrm{sen}^2\theta}\,, \quad k^2_2 = \frac{1}{\cos^2\theta}\,,$$

valori che si sostituiranno nel primo membro della stessa equazione, e facendo inoltre

$$\frac{1 - v^2}{1 - v^2\cos^2\theta} = \cos^2\omega\,,$$

si trasformerà questo primo membro in

$$\frac{\sqrt{(1 - c'^2\mathrm{sen}^2\theta)}}{\mathrm{sen}\theta\,\cos\theta}\,[\,\Pi(\cot^2\theta, c) - \mathrm{sen}^2\theta.\mathrm{F}(c)].$$

Ne risulta dunque

$$\frac{\sqrt{(1 - c'^2\mathrm{sen}^2\theta)}}{\mathrm{sen}\theta\,\cos\theta}[\,\Pi(\cot^2\theta\,, c) - \mathrm{sen}^2\theta.\mathrm{F}(c)\,]$$

$$= \frac{1}{2}\pi + \mathrm{F}(c)\,\mathrm{F}(c'\,, \theta) - \mathrm{E}(c)\,\mathrm{F}(c', \theta) - \mathrm{F}(c)\,\mathrm{E}(c', \theta)\,,$$

altra formula di Legendre per la riduzione d'una funzione ellittica completa di terza specie a funzioni complete ed incomplete di prima e seconda specie.

Noterò che abbiamo quì sciolto il problema della quadratura dell'ellisse sferica. Se infatti si pone

$$x_1 = x\sqrt{(a^2 - a^2_1)},\ x_2 = y\sqrt{(a^2 - a^2_2)}\ ,\ x_3 = z\sqrt{(a^2 - a^2_3)},$$

l'equazione (24) per $n = 3$ diventa

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\ ,$$

e rappresenta una sfera riferita a coordinate ortogonali x, y, z; nel medesimo tempo l'equazione dei limiti

$$\frac{x^2_1}{h^2_1} + \frac{x^2_2}{h^2_2} = 1$$

diventa

$$k^2_1\, x^2 + k^2_2\, y^2 = 1 = x^2 + y^2 + z^2\ ,$$

ossia

$$\frac{x^2}{b^2 - a^2_1} + \frac{y^2}{b^2 - a^2_2} = \frac{z^2}{a^2_2 - b^2}\ ,$$

e rappresenta un cono di secondo grado concentrico alla sfera; onde l'integrale duplicato $V = \int \frac{dx_1 dx_2}{x_3}$ somministra la misura dell'area sferica terminata dalla superficie conica. La formula precedente offrirà dunque un'espressione di quest'area, e potrà facilmente riconoscersi che essa conviene con le espressioni già note (V. *Journal de Liouville*, 1842, p. 262; *Società Italiana*, *tom.* 24, 2.ª *p.te*, Mem. del Prof. Tortolini).

Supponiamo in secondo luogo $n = 4$. Avremo dalla formula (36)

$$\frac{1}{8}\pi^2 = \int_0^{a_2} du_1 \int_{a_2}^{a_3} du_2 \int_{a_3}^{a_4} du_3 \frac{(u^2_2 - u^2_1)(u^2_3 - u^2_1)(u^2_3 - u^2_2)}{\sqrt{(U_1 U_2 U_3)}}$$

dove sarà

$$U_1 = (a^2{}_2 - u^2{}_1)(a^2{}_3 - u^2{}_1)(a^2{}_4 - u^2{}_1),$$
$$U_2 = (u^2{}_2 - a^2{}_2)(a^2{}_3 - u^2{}_2)(a^2{}_4 - u^2{}_2),$$
$$U_3 = (u^2{}_3 - a^2{}_2)(u^2{}_3 - a^2{}_3)(a^2{}_4 - u^2{}_3).$$

Si faccia

$$u^2{}_1 = \frac{a^2{}_2\, a^2{}_3 \cos^2\varphi}{a^2{}_3 - a^2{}_2 \operatorname{sen}^2\varphi}, \quad u^2{}_2 = \frac{a^2{}_2\, a^2{}_3}{a^2{}_3 \cos^2\psi + a^2{}_2 \operatorname{sen}^2\psi},$$
$$u^2{}_3 = \frac{a^2{}_3\, a^2{}_4}{a^2{}_3 \cos^2\omega + a^2{}_4 \operatorname{sen}^2\omega}, \quad c^2 = \frac{a^2{}_2}{a^2{}_3}\,\frac{a^2{}_4 - a^2{}_3}{a^2{}_4 - a^2{}_2},$$
$$c'^2 = 1 - c^2, \qquad a^2{}_2 = a^2{}_4 \cos^2\theta, \qquad q = c^2 \operatorname{tang}^2\theta,$$
$$q' = -(1 - c'^2 \operatorname{sen}^2\theta):$$

eseguite le sostituzioni e le riduzioni che saranno facili benchè lunghe, e movendo riguardo al teorema di Legendre già mentovato, e alle formule che esprimano con trascendenti ellittici gl' integrali della forma

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{(1+q \operatorname{sen}^2\varphi)^2}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \operatorname{sen}^2\varphi)}},$$

si otterrà alla fine

$$\frac{\sqrt{(1 - c'^2 \operatorname{sen}^2\theta)}}{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}\,\Pi(q, c) + \frac{c'^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{\sqrt{(1 - c'^2 \operatorname{sen}^2\theta)}}\,\Pi(q'\, c)$$
$$= \frac{1}{2}\pi - \frac{\cot\theta}{\sqrt{(1 - e'^2 \operatorname{sen}^2\theta)}}\,F(c),$$

relazione tra due funzioni ellittiche complete di terza specie a parametri circolari, l'uno positivo, l'altro negativo.

Avremo poi dalla formula (38)

$$\frac{1}{4}\pi\int_0^1 \frac{(1-v^2)dv}{\sqrt{[(k^2_1-v^2)(k^2_2-v^2)(k^2_3-v^2)]}}$$

$$=\int_0^{a_2} du_1\int_{a_2}^{a_3} du_2\int_{a_3}^{b}\frac{(u^2_2-u^2_1)(u^2_3-u^2_1)(u^2_2-u^2_2)}{\sqrt{(U_1\,U_2\,U_3|}},$$

e il secondo membro si trasformerà come dicansi se introducasi di più un agolo λ determinato dall'equazione

$$b^2=\frac{a^2_3\,a^2_4}{a^2_3\cos^2\lambda+a^2_4\,\text{sen}^2\lambda},$$

talche λ sarà il limite superiore di ω; si trasformerà similmente il primo membro, ponendo

$$v^2=\frac{k^2_1\,\text{sen}^2\varphi}{\text{sen}^2\lambda+\cos^2\lambda\,\text{sen}^2\varphi},$$

si sostituirà poscia all'angolo θ un altro angolo μ col fare

$$c^2\text{tang}^2\theta=\cot^2\mu\,;$$

e adoperando le formule di Legendre per la riduzione delle frazioni ellittiche complete di terza specie, eseguiti i calcoli e le riduzioni, si troverà

$$\frac{\sqrt{(1-c'^2\text{sen}^2\mu)}}{\text{sen}\mu\,\cos\mu}\Big(\Pi\,(\cot^2\mu,c,\lambda)-\text{sen}^2\mu.\,F(c,\lambda)\Big)$$

$$+\frac{\sqrt{(1-c^2\text{sen}^2\lambda)}}{\text{sen}\lambda\,\cos\lambda}\Big(\Pi\,(\cot^2\lambda,c',\mu)-\text{sen}^2\lambda.F(c',\mu)\Big)$$

$$=\frac{1}{2}\pi-E(c,\lambda)\,F(c',\mu)-F(c,\lambda)\,E(c',\mu)+F(c,\lambda)F(c',\mu),$$

relazione tra due funzioni incomplete di terza specie, conosciute sotto il nome di permutazione del parametro coll' argomento.

Possiamo da tutto ciò concludere, che il metodo esposto raccoglie sotto uno stesso principio e stende agl'integrali Abeliani di qualsiasi ordine parecchie importanti proprietà degl' integrali ellittici, e in particolare che nella formula (36) si trova compreso ed ampliato il teorema sulle funzioni ellittiche complete di prima e seconda specie a moduli completivi, e nella (36) altri due teoremi, cioè il teorema della riduzione delle funzioni complete di terza specie, ogniqualvolta si prenda per n un numero impari, e quello della permutazione del parametro coll'argomento nelle funzioni incomplete di terza specie, quando si prende per n un numero pari. (*)

8.° Le equazioni che abbiamo ottenute nel num. prec. per mezzo delle formule (36) e (38), non contengono altre funzioni ellittiche di terza specie, che quelle il cui parametro è circolare, ma è noto che si passa con una trasformazione immaginaria dalle funzioni di parametro circolare alle funzioni di parametro logaritmico. Tuttavia mostrerò che dal medesimo integrale multiplo V si può direttamente dedurre la riduzione delle funzioni ellittiche complete di terza specie a parametro logaritmico.

Sia

$$n = 3, \quad V = \iint \frac{dx_1\, dx_2}{x_3},$$

ritenute fra x_1, x_2, x_3 le relazioni (24) e (25), ma supponendo

$$a_1 < a_3 < a < a_2 < b,$$

$$h^2_1 = \frac{a^2 - a^2_1}{a^2_3 - a^2_1}(b^2 - a^2_1), \quad h^2_2 = \frac{a^2_2 - a^2}{a^2_2 - a^2_3}(b^2 - a^2_2):$$

l'equazione (27) avrà tre radici $u^2_1 < u^2_2 < u^2_3$, di cui la

(*) In altri modi furono ampliati, il primo teorema dal Sig. Hermite (*Comptes rendus Acad. de Paris*, tom. 18, p. 1147), e il terzo da Abel e Jacobi (*Jacobi, Opusc. mathem.* vol. I, p. 363).

media u^2_2 eguaglierà a^2 , e posto

$$a_1 = 0, \qquad k = a \sqrt{\left(\frac{a^2_2 - a^2}{a^2 - a^2_3}\right)},$$

si trasformerà facilmente l'integrale duplicato V in

$$V = k\int_0^{a_3} du_1 \int_{a_2}^{b} du_3 \frac{u^2_3 - u^2_1}{\sqrt{[(a^2_2 - a^2_1)(a^2_3 - u^2_1)(u^2_3 - a^2_2)(u^2_3 - a^2_3)]}}.$$

Facendo poi

$$u_1 = a_3 \operatorname{sen}\varphi, \quad u_3 = \frac{a_2}{\operatorname{sen}\psi}, \quad b = \frac{a_2}{\operatorname{sen}\theta}, \quad c = \frac{a_3}{a_2},$$

se ne trarrà dopo alcune riduzioni

$$V = k\,[F(c).\cot\theta\sqrt{(1 - c^2\operatorname{sen}^2\theta)} + F(c)\,E(c,\theta) - E(c)\,F(c,\theta)].$$

D'altra parte, se nella espressione di V si sostituisce alla variabile x_2 una nuova variabile φ, e poscia alla variabile x_1 una nuova variabile ψ, ponendo

$$x_2 = \operatorname{tang}\varphi\sqrt{(a^2_2 - a^2)}, \quad x_1 = a\frac{\cos\psi}{\cos\varphi},$$

$$dx_2 = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{(a^2_2 - a^2)}, \quad dx_1 = -a\frac{d\psi \operatorname{sen}\psi}{\cos\varphi},$$

avremo

$$x_3 = \frac{\operatorname{sen}\psi}{\cos\varphi}\sqrt{(a^2 - a^2_3)},$$

e quindi

$$V = k\iint \frac{d\varphi\, d\psi}{\cos^2\varphi}.$$

Cominciando l'integrazione da φ, e dal limite $\varphi = 0$, si troverà

$$V = k\int \tan\varphi\, d\psi.$$

ma nei limiti si ha

$$\frac{x^2_1}{h^2_1}+\frac{x^2_2}{h^2_2}=1,$$

che diviene

$$c^2\text{sen}^2\theta.\frac{\cos^2\psi}{\cos^2\varphi}+c'^2\,\text{tang}^2\theta.\,\text{tang}^2\varphi=1,$$

e se ne trae

$$\text{tang}^2\varphi=\frac{1-c^2\text{sen}^2\theta\cos^2\psi}{c'^2+c^2\cos^2\theta\cos^2\psi}\cot^2\theta;$$

dunque

$$\text{V}=k\cot\theta\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\psi\sqrt{\left(\frac{1-c^2\text{sen}^2\theta\cos^2\psi}{c'^2+c^2\cos^2\theta\cos^2\psi}\right)};$$

posto finalmente

$$\cos^2\psi=\frac{\cos^2\omega}{1-c^2\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\omega},$$

si otterrà

$$\text{V}=k\cot\theta\sqrt{(1-c^2\text{sen}^2\theta)}.\Pi(-c^2\text{sen}^2\theta,c).$$

Il confronto dei due valori di V darà la formula cercata

$$\cot\theta\sqrt{(1-c^2\text{sen}^2\theta)}.[\Pi(-c^2\text{sen}^2\theta.c)-\text{F}(c)]$$
$$=\text{F}(c)\,\text{E}(c,\theta)-\text{E}(c)\,\text{F}(c,\theta).$$

Alla stessa formula si può giungere anche supponendo

$$a_1=0,\quad a_2<a<a_3<b,$$

$$h^2_1=\frac{a^2}{a^2_3}b^2,\qquad h^2_2=\frac{a^2-a^2_2}{a^2_3-a^2_2}(b^2-a^2_2);$$

si sostituirà ad x_2 un'altra variabile φ ponendo

$$x_2=\frac{x_1}{a}\text{tang}\varphi.\sqrt{(a^2-a^2_2)},$$

poscia ad x_1 un'altra variabile ψ ponendo

$$x_1 = a\,\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\,,$$

onde risulterà

$$V = k\iint\frac{d\varphi d\psi}{\cos^2\psi} = k\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\operatorname{tang}\psi\, d\varphi\,;$$

si farà poi

$$a_2 = a_3 c\,,\quad \frac{a^2{}_3 - a^2{}_2}{b^2 - a^2{}_2} = \cos^2\theta,$$

e l'equazione dei limiti diverrà

$$\frac{\cos^2\theta}{1 - c^2\operatorname{sen}^2\theta}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\psi} + \cos^2\theta.\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\cos^2\psi} = 1\,,$$

ossia

$$\operatorname{tang}^2\psi = \frac{1 - c^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi}{1 - c^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi}\,;$$

da ultimo si porrà

$$\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{\cos^2\omega}{1 - c^2\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\omega}\,,$$

e si otterrà

$$V = k\cot\theta\sqrt{(1 - c^2\operatorname{sen}^2\theta)}\left[\Pi(-c^2\operatorname{sen}^2\theta,\, c) - \frac{1}{\cos^2\theta}F(c)\right]\,,$$

espressione da paragonarsi con quella che deriverà dalla sostituzione delle coordinate ellittiche u_1, u_2, u_3 determinata dall'equazione (27), per la quale si farà

$$u_2 = a\,,\quad u_1 = a_2\operatorname{sen}\varphi\,,\quad u^2{}_3 = a^2{}_3\frac{1 - c^2\operatorname{sen}^2\psi}{\cos^2\psi}\,,$$

e s'integrerà da $\varphi = 0$ a $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, e de $\psi = 0$ a $\psi = \theta$.

L'esame di questi casi particolari ci suggerirebbe d'inda-

gare, come si possa determinare per n qualsivoglia l'integrale multiplo V, quando nelle formule (24) e 37), ritenuto

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} ,$$

si abbia

$$a_{n-1} < b \qquad \text{e} \qquad a_p < a_n < a < a_{p+1} ,$$

(indicando con p uno qualsiasi dei numeri 1, 2, ... $n-2$), oppure $a_{n-1} < a < a_n < b$; argomento del quale mi riservo d'occuparmi altra volta. Troveremo del resto, nel seguente § 3, formule che comprendono integrali ellittici di terza specie tanto a parametro logaritmico quanto a parametro circolare.

§. 3.

Altre formule più generali.

9.° Ripiglio le equazioni (1), (2), . . . (6). Denotati con m_1, m_2, ... m_n più esponenti positivi, e fatto

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n ,$$

si ha dalle formule (3) e (6)

$$a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_{n-1}^{m_{n-1}} . a_n^{m_n} x_n^{m_n-1} . x_1^{m_1-1} dx_1 . x_2^{m_2-1} dx_2 \ldots$$

$$x_{n-1}^{m_{n-1}-1} dx_{n-1} = \rho^m . y_n^{m_2-1} . y_1^{m_1-1} dy_1 . y_2^{m_2-1} dy_2 \ldots y_{n-1}^{m_{n-1}-1} dy_{n-1}$$

e di quì si trae

$$\int \frac{x_n^{m_n-1}}{\rho^m} . x_1^{m_1-1} dx_1 . x_2^{m_2-1} dx_2 \ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-1} dx_{n-1}$$

$$= \frac{1}{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_{n-1}^{m_{n-1}} a_n^{m_n}} \int y_n^{m_n-1} . y_1^{m_1-1} dy_1 , y_2^{m_2-1} dy_2 \ldots y_{n-1}^{m_{n-1}-1} dy_{n-1}$$

stesi gl'integrali a tutti i valori positivi (o nulli) di x_1, x_2, ... x_n, y_1, y_2, ... y_n che verificheranno le equazioni (1) e (2). Ora l'integrale multiplo compreso nel secondo membro è dato dalla formola (22), donde si conchiude

$$(39)\quad \int \frac{x_n^{m_n-1}}{\rho^m} \cdot x_1^{m_1-1}\, dx_1 . x_2^{m_2-1}\, dx_2 \ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-1}\, dx_{n-1} = \frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2) \ldots \Gamma(m_n)}{\Gamma(m). a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n}} .$$

facciamo generalmente

$$P_\lambda = \int \frac{x_n^{m_n-1}}{\rho^\lambda} . x_1^{m_1-1}\, dx_1 . x_2^{m_2-1}\, dx_2 \ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-1}\, dx_{n-1} ,$$

e chiamiamo Q_λ ciò che diviene P_λ quando si muta ρ in $1 + t^{\frac{1}{r}}\rho$: l'equazione (39) darà il valore di P_m, e ne trarremo quello di Q_m cambiando generalmente in a_i in $1+a_i t^{\frac{1}{r}}$ sicchè avremo

$$(40)\quad Q_m = \frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2) \ldots \Gamma(m_n)}{\Gamma(m)} \frac{1}{(1+a_1 t^{\frac{1}{r}})^{m_1}(1+a_2 t^{\frac{1}{r}})^{m_2} \ldots (1+a_n t^{\frac{1}{r}})^{m_n}} .$$

Posto

$$\frac{1}{1+\rho t^{\frac{1}{r}}} = v , \quad 0 < r < \lambda ,$$

sarà

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+\rho t^{\frac{1}{r}})^\lambda} = \frac{r}{\rho^r} . \int_0^1 v^{\lambda-r-1}\, dv (1-v)^{r-1} = \frac{r}{\rho^r} . \frac{\Gamma(r)\Gamma(\lambda-r)}{\Gamma(\lambda)} ;$$

e da ciò si dedurrà

$$(41)\qquad \int_0^\infty Q_\lambda\, dt = \frac{r\Gamma(r)\,\Gamma(\lambda-r)}{\Gamma(\lambda)}\,.\,P_r\,.$$

Facendo quì $\lambda = m$, e sostituendo il valore di Q_m dato dalla (40), se inoltre pongasi $t = v^r$, si otterà

$$(42)\qquad P_r = \frac{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_n)}{\Gamma(r)\Gamma(m-r)}\int_0^\infty \frac{v^{r-1}dv}{(1+a_1v)^{m_1}(1+a_2v)^{m_2}\ldots(1+a_nv)^{m_n}}$$

formula che suppone $m_1, m_2, \ldots m_n$ positivi e $0 < r < m$.

È facile desumerne $P_{r+\mu}$ per ogni valor intero e positivo di μ, e quindi P_λ per ogni valor positivo sebbene rotto, o irrazionale di λ : indi la formula (41) porgerà $\int_0^\infty Q_\lambda\, dt$ per un valor qualsiasi di λ superiore a quello di r. Se supponiamo

$$m_n = 1,\quad m_1 = m_2 = \ldots = m_{n-1} = \tfrac{1}{2},$$

saremo ricondotti alle funzioni P_λ già considerate nel num. 2.° e ne otterremo l'espressione con un integrale semplice per tutti i valori positivi di λ; se poi supponiamo

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_{n-1} = m_n = \tfrac{1}{2},$$

troveremo le funzioni Y_p del Signor W. Roberts sopra mentovate (num. 3.°), ed esprimeremo anche queste con un integrale semplice per tutti i valori positivi, ancorchè retti o irrazionali di p.

10.° Sia ora x_n una funzione di $n-1$ variabili $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, determinata dall'equazione

$$(43)\qquad \frac{x_1}{a-a_1} + \frac{x_2}{a-a_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{a-a_{n-1}} + \frac{x_n}{a-a_n} = 1,$$

dove $a, a_1, a_2, \ldots a_n$ indicano costanti positive; $h_1, h_2, \ldots h_{n-1}$

stesi gl'integrali a tutti i valori positivi (o nulli) di x_1, x_2, ... x_n, y_1, y_2, ... y_n che verificheranno le equazioni (1) e (2). Ora l'integrale multiplo compreso nel secondo membro è dato dalla formola (22), donde si conchiude

$$(39)\quad \int \frac{x_n^{m_n-1}}{\rho^m} \cdot x_1^{m_1-1}\, dx_1 .\, x_2^{m_2-1}\, dx_2 \ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-1}\, dx_{n-1} = \frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\,\ldots\,\Gamma(m_n)}{\Gamma(m).\, a_1^{m_1}\, a_2^{m_2}\ldots a_n^{m_n}}$$

facciamo generalmente

$$P_\lambda = \int \frac{x_n^{m_n-1}}{\rho^\lambda} .\, x_1^{m_1-1}\, dx_1 .\, x_2^{m_2-1}\, dx_2 \ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-1}\, dx_{n-1},$$

e chiamiamo Q_λ ciò che diviene P_λ quando si muta ρ in $1 + t^{\frac{1}{r}}\rho$: l'equazione (39) darà il valore di P_m, e ne trarremo quello di Q_m cambiando generalmente in a_i in $1+a_i t^{\frac{1}{r}}$ sicchè avremo

$$(40)\quad Q_m = \frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\,\ldots\,\Gamma(m_n)}{\Gamma(m)} \; \frac{1}{(1+a_1 t^{\frac{1}{r}})^{m_1}(1+a_2 t^{\frac{1}{r}})^{m_2}\ldots(1+a_n t^{\frac{1}{r}})^{m_n}}.$$

Posto

$$\frac{1}{1+\rho t^{\frac{1}{r}}} = v, \quad 0 < r < \lambda,$$

sarà

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+\rho t^{\frac{1}{r}})^\lambda} = \frac{r}{\rho^r} . \int_0^1 v^{\lambda-r-1}\, dv (1-v)^{r-1} = \frac{r}{\rho^r} . \frac{\Gamma(r)\Gamma(\lambda-r)}{\Gamma(\lambda)};$$

e da ciò si dedurrà

$$(41)\qquad \int_0^\infty Q_\lambda\, dt = \frac{r\Gamma(r)\,\Gamma(\lambda - r)}{\Gamma(\lambda)} . P_r .$$

Facendo qui $\lambda = m$, e sostituendo il valore di Q_m dato dalla (40), se inoltre pongasi $t = v^r$, si otterà

$$(42)\qquad P_r = \frac{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_n)}{\Gamma(r)\Gamma(m-r)} \int_0^\infty \frac{v^{r-1}dv}{(1+a_1v)^{m_1}(1+a_2v)^{m_2}\ldots(1+a_nv)^{m_n}}$$

formula che suppone $m_1, m_2, \ldots m_n$ positivi e $0 < r < m$.

È facile desumerne $P_{r+\mu}$ per ogni valor intero e positivo di μ, e quindi P_λ per ogni valor positivo sebbene rotto, o irrazionale di λ : indi la formula (41) porgerà $\int_0^\infty Q_\lambda\, dt$ per un valor qualsiasi di λ superiore a quello di r. Se supponiamo

$$m_n = 1, \quad m_1 = m_2 = \ldots = m_{n-1} = \tfrac{1}{2} ,$$

saremo ricondotti alle funzioni P_λ già considerate nel num. 2.° e ne otterremo l'espressione con un integrale semplice per tutti i valori positivi di λ; se poi supponiamo

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_{n-1} = m_n = \tfrac{1}{2} ,$$

troveremo le funzioni Y_p del Signor W. Roberts sopra mentovate (num. 3.°), ed esprimeremo anche queste con un integrale semplice per tutti i valori positivi, ancorchè retti o irrazionali di p.

10.° Sia ora x_n una funzione di $n-1$ variabili $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, determinata dall'equazione

$$(43)\qquad \frac{x_1}{a-a_1} + \frac{x_2}{a-a_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{a-a_{n-1}} + \frac{x_n}{a-a_n} = 1 ,$$

dove $a, a_1, a_2, \ldots a_n$ indicano costanti positive; $h_1, h_2, \ldots h_{n-1}$

altre costanti positive, e

$$(44) \qquad X = 1 - \frac{x_1}{h_1} - \frac{x_2}{h_2} - \ldots - \frac{x_{n-1}}{h_{n-1}} \;;$$

e debbasi determinare l'integrale multiplo

$$V = \int \frac{X^{m_n - 1}}{x_n^{\lambda}} . x_1^{m_1 - 1} dx_1 . x_2^{m_2 - 1} dx_2 \ldots x_{n-1}^{m_{n-1} - 1} dx_{n-1}$$

steso a tutti i valori positivi di x_1, $x_2, \ldots x_{n-1}$ che soddisfanno alla condizione $X > 0$ o $X = 0$, supponendo anche x_n positiva. Ammetteremo che gli esponenti

$$m_1, \; m_2, \; \ldots \; m_{n-1}, \; m_n$$

siano tutti maggiori di zero, che λ sia compreso tra zero e

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n ,$$

e inoltre

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a ,$$

e h_i non maggiore di $a - a_i$ per $i = 1, 2, \ldots n - 1$; e faremo

$$x_i = h_i y_i , \quad 1 - \frac{h_i}{a - a_i} = \alpha_i , \quad \alpha_n = 1 ,$$

$$y_n = 1 - y_1 - y_2 - \ldots - y_{n-1} ,$$

$$\rho = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_{n-1} y_{n-1} + \alpha_n y_n ,$$

onde risulterà

$$X = y_n , \qquad x_n = (a - a_n)\rho ,$$

$$dx_1 \, dx_2 \ldots dx_{n-1} = h_1 \, h_2 \ldots h_{n-1} \, dy_1 \, dy_2 \ldots dy_{n-1} ,$$

sicchè posto per compendio

$$h = (a - a_n)^{-\lambda} . \, h_1^{m_1} \, h_2^{m_2} \ldots h_{n-1}^{m_{n-1}} ,$$

si avrà

$$V=h\int\frac{y_n^{m_n-1}}{\rho^\lambda}\cdot y_1^{m_1-1}\,dy_1\cdot y_2^{m_2-1}\,dy_2\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}-1}dy_{n-1},$$

e questo secondo membro sarà un integrale multiplo steso a tutti i valori positivi di $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, y_n$, la cui espressione si otterrà dalla formula (42) cambiandovi r in λ, a_i in α_i e a_n in 1, e moltiplicando per h. Dunque

$$V=h\frac{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_n)}{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(m-\lambda)}\int_0^\infty\frac{1}{(1+v)^{m_n}}\frac{v^{\lambda-1}dv}{(1+\alpha_1 v)^{m_1}(1+\alpha_2 v)^{m_2}\ldots(1+\alpha_{n-1}v)^{m_{n-1}}}.$$

Determinando così l'integrale V, trasformiamolo surrogando alle x_i altre variabili u_i radici dell'equazione

$$(46)\qquad \frac{x_1}{u_i-a_1}+\frac{x_2}{u_i-a_2}+\ldots+\frac{x_n}{u_i-a_n}=1:$$

questa darà n valori $u_1, u_2, \ldots u_n$ di u_i, positivi e disuguali, e supponendo

$$u_1<u_2<\ldots<u_n,$$

si avrà

$$a_i<u_i<a_{i+1},\quad a_n<u_n,$$

e quindi $u_n=a$ per la (43): di più, sarà

$$(47)\qquad x_i+\frac{(a_i-u_1)(a_i-u_2)\ldots(a_i-u_n)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\ldots(a_i-a_n)}=0,$$

che darà x_n se si fa $i=n$. Sostituito in V questo valore di x_n, si ottiene

$$\left(\frac{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}{a-a_n}\right)^\lambda\int X^{m_n-1}\frac{x_1^{m_1-1}dx_1\,.\,x_2^{m_2-1}dx_2\ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-1}dx_{n-1}}{(a_n-u_1)^\lambda(a_n-u_2)^\lambda\ldots(a_n-u_{n-1})^\lambda},$$

donde ponendo

$$x_i = \frac{a - a_i}{a_n - a_i} z_i ,$$

e facendo

$$k = \frac{1}{(a-a_n)^\lambda} \frac{(a-a_1)^{m_1}(a-a_2)^{m_2} \dots (a-a_{n-1})^{m_{n-1}}}{(a_n-a_1)^{m_1-\lambda} (a_n-a_2)^{m_2-\lambda} \dots (a_n-a_{n-1})^{m_{n-1}-\lambda}}$$

si deduce

$$V = k \int X^{m_n-1} \frac{z_1^{m_1-1} dz_1 . z_2^{m_2-1} dz_2 \dots z_{n-1}^{m_{n-1}-1} dz_{n-1}}{(a_n-u_1)^\lambda (a_n-u_2)^\lambda \dots (a_n-u_{n-1})^\lambda} .$$

Intanto la (47) diviene

$$(48) \qquad z_i + \frac{(a_i-u_1)(a_i-u_2) \dots (a_i-u_{n-1})}{(a_i-a_1)(a_i-a_2) \dots (a_i-a_{n-1})} = 0 ,$$

che mostra essere le u_i collegate alle z_i per mezzo dell' equazione

$$\frac{z_1}{u_i-a_1} + \frac{z_2}{u_i-a_2} + \dots + \frac{z_{n-1}}{u_i-a_{n-1}} = 1 ,$$

e da ciò si desume che per trasformare l'integrale multiplo V si deve ricorrere alla formula

$$z_1^{-\frac{1}{2}} dz_1 . z_2^{-\frac{1}{2}} dz_2 \dots z_{n-1}^{-\frac{1}{2}} dz_{n-1} = \frac{\Pi(u_l-u_{l'})}{\sqrt{(\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_{n-1})}} . du_1 du_2 \dots du_{n-1} ,$$

nella quale Δ_i indica il prodotto

$$(u_i-a_1)(u_i-a_2)\dots(u_i-a_i) \times (a_{i+1}-u_i)(a_{i+2}-u_i)\dots(a_{n-1}-u_i),$$

e $\Pi(u_l-u_{l'})$ rappresenta un altro prodotto formato coi binomj $u_l-u_{l'}$ assegnando ad l i valori 2, 3, . . . $n-1$, e prendendo l' intero e positivo ma inferiore ad l: si ottiene infatti questa formula cambiando nelle equazioni (30) a_i, z_i, u_i in $\sqrt{a_i}$, $\sqrt{z_i}$, $\sqrt{u_i}$. Ponendo

$$(a_n - u_1)^\lambda (a_n - u_2)^\lambda \ldots (a_n - u_{n-1})^\lambda . \sqrt{(\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_{n-1})} = \Delta ,$$

si avrà dunque

$$V = k \int \frac{1}{\Delta} X^{m_n - 1} . \Pi (u_l - u_{l'}) . z_1^{m_1 - \frac{1}{2}} . z_2^{m_2 - \frac{1}{2}} \ldots . z_{n-1}^{m_{n-1} - \frac{1}{2}} du_1 \, du_2 \ldots du_{n-1} ,$$

ma dovremo ancora sostituire alle z_1, z_2, ... z_{n-1} e ad X le loro espressioni per mezzo delle nuove variabili u_i. A tal uopo l'equazione (48) somministra

$$z_1^{m_1 - \frac{1}{2}} . z_2^{m_2 - \frac{1}{2}} \ldots . z_{n-1}^{m_{n-1} - \frac{1}{2}}$$

$$= \Pi \left[\frac{(a_l - u_{l'})^{m_l - \frac{1}{2}} . (u_l - a_{l'})^{m_{l'} - \frac{1}{2}} . (u_i - a_i)^{m_i - \frac{1}{2}}}{(a_l - a_{l'})^{m_l + m_{l'} - 1}} \right]$$

steso il segno di moltiplicazione Π agl'indicati valori di l e l', e ai valori 1, 2, ... $n - 1$ di i; e d'altra parte è

$$\Delta = \Pi . (a_n - u_i)^\lambda (u_i - a_i)^{\frac{1}{2}} (u_l - a_{l'})^{\frac{1}{2}} (a_l - u_{l'})^{\frac{1}{2}} .$$

Adunque, se per compendio scriviamo

$$K = k \Pi . (a_l - u_{l'})^{-m_l - m_{l'} + 1} ,$$

$$R_i = (a_n - u_i)^{-\lambda} . (u_i - a_1)^{m_1 - 1} (u_i - a_2)^{m_2 - 1} \ldots (u_i - a_i)^{m_i - 1}$$

$$\times (a_{i+1} - u_i)^{m_{i+1} - 1} \ldots (a_{n-1} - u_i)^{m_{n-1} - 1}$$

avremo

$$(49) \quad V = K \int X^{m_n - 1} . \Pi (u_l - u_{l'}) . R_1 du_1 . R_2 du_3 \ldots R_{n-1} du_{n-1} ,$$

intendendo che in luogo di X si metta l'espressione equivalente formata con le u_i, la quale si dedurrà dalle formule

(44) e (47), e che le variabili positive u_i siano prese fra i limiti determinati dalla condizione $X > 0$ o $= 0$.

Il confronto delle equazioni (45) e (49) darà un teorema intorno agl'integrali iperellittici.

11.° Sia in primo luogo

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0\,;$$

se $m_n - \lambda > 0$, si avrà

$$\int_0^\infty \frac{v^{\lambda-1}\,dv}{(1+v)^{m_n}} = \int_0^1 z^{m_n-\lambda-1}\,dz(1-z)^{\lambda-1} = \frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(m_n-\lambda)}{\Gamma(m_n)},$$

e quindi la formula (45) darà

$$V = h\frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_{n-1})\,\Gamma(m_n-\lambda)}{\Gamma(m-\lambda)},$$

ossia, cambiando m_n in $m_n+\lambda$, m in $m+\lambda$,

$$V = h\frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_n)}{\Gamma(m)},$$

il che s'accorda con la formula (22), poichè si avrà pure

$$h_i = a - a_i\,,$$

e per le (43) e (44)

$$X = \frac{x_n}{a-a_n},$$

onde l'integrale V si riduce a quello della formula (22). Ma sostituendo il valore di x_n dato dalla (47), si otterrà

$$X = \frac{(a_n-u_1)(a_n-u_2)\ldots(a_n-u_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})},$$

e i limiti delle variabili u_1, u_2, ... u_{n-1} saranno a_1 e a_2, a_2 e a_3, ... a_{n-1} e a_n, poichè tra questi limiti X rimane

positiva. Fatto dunque

$$H = \Pi . (a_n - a_l)^{m_n + m_l - 1} (a_l - a_{l'})^{m_l + m_{l'} - 1} ,$$

$$U_i = (u_i - a_1)^{m_1 - 1} (u_i - a_2)^{m_2 - 1} \dots (u_i - a_i)^{m_i - 1}$$

$$\times (a_{i+1} - u_i)^{m_{i+1} - 1} (a_{i+2} - u_i)^{m_{i+2} - 1} \dots (a_n - u_i)^{m_n - 1} ,$$

e ritenuto il cambiamento di m_n in $m_n + \lambda$, e

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n ,$$

risulterà dalla (49)

$$(50) \qquad H \frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2) \dots \Gamma(m_n)}{\Gamma(m)}$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} U_1 du_1 \int_{a_2}^{a_3} U_2 du_2 \dots \int_{a_{n-1}}^{a_n} U_{n-1}\, du_{n-1}\, \Pi(u_l - u_{l'}) .$$

Il secondo membro di questa equazione si spezzerà in una *somma alternata* di prodotti d'integrali definiti semplici della forma

$$\int_\alpha^\beta U_i u_i^\nu \, du_i ,$$

cui limiti saranno

$$\alpha = a_i , \quad \beta = a_{i+1} ,$$

e a questi limiti si potranno facilmente sostituire zero, e l' infinito, ponendo per esempio

$$v_i = \frac{u_i - \alpha}{\beta - u_i} , \quad \text{ossia} \quad u_i = \frac{\alpha + \beta v_i}{1 + v_i} .$$

Prendiamo, per fare un caso particolare, $n = 3$; allora sarà

(44) e (47), e che le variabili positive u_i siano prese fra i limiti determinati dalla condizione $X > 0$ o $= 0$.

Il confronto delle equazioni (45) e (49) darà un teorema intorno agl'integrali iperellittici.

11.° Sia in primo luogo

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0\,;$$

se $m_n - \lambda > 0$, si avrà

$$\int_0^\infty \frac{v^{\lambda-1}\,dv}{(1+v)^{m_n}} = \int_0^1 z^{m_n-\lambda-1}\,dz(1-z)^{\lambda-1} = \frac{\Gamma(\lambda)\,\Gamma(m_n-\lambda)}{\Gamma(m_n)},$$

e quindi la formula (45) darà

$$V = h\frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_{n-1})\,\Gamma(m_n-\lambda)}{\Gamma(m-\lambda)},$$

ossia, cambiando m_n in $m_n+\lambda$, m in $m+\lambda$,

$$V = h\frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_n)}{\Gamma(m)},$$

il che s'accorda con la formula (22), poichè si avrà pure

$$h_i = a - a_i\,,$$

e per le (43) e (44)

$$X = \frac{x_n}{a-a_n},$$

onde l'integrale V si riduce a quello della formula (22). Ma sostituendo il valore di x_n dato dalla (47), si otterrà

$$X = \frac{(a_n-u_1)(a_n-u_2)\ldots(a_n-u_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})},$$

e i limiti delle variabili $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ saranno a_1 e a_2, a_2 e a_3, $\ldots a_{n-1}$ e a_n, poichè tra questi limiti X rimane

positiva. Fatto dunque

$$H = \Pi . (a_n - a_l)^{m_n + m_l - 1} (a_l - a_{l'})^{m_l + m_{l'} - 1} ,$$

$$U_i = (u_i - a_1)^{m_1 - 1} (u_i - a_2)^{m_2 - 1} \dots (u_i - a_i)^{m_i - 1}$$

$$\times (a_{i+1} - u_i)^{m_{i+1} - 1} (a_{i+2} - u_i)^{m_{i+2} - 1} \dots (a_n - u_i)^{m_n - 1} ,$$

e ritenuto il cambiamento di m_n in $m_n + \lambda$, e

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n ,$$

risulterà dalla (49)

$$(50) \qquad H \frac{\Gamma(m_1) \Gamma(m_2) \dots \Gamma(m_n)}{\Gamma(m)}$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} U_1 du_1 \int_{a_2}^{a_3} U_2 du_2 \dots \int_{a_{n-1}}^{a_n} U_{n-1} du_{n-1} \Pi (u_l - u_{l'}) .$$

Il secondo membro di questa equazione si spezzerà in una *somma alternata* di prodotti d'integrali definiti semplici della forma

$$\int_\alpha^\beta U_i u_i^p \, du_i ,$$

cui limiti saranno

$$\alpha = a_i , \quad \beta = a_{i+1} ,$$

e a questi limiti si potranno facilmente sostituire zero, e l' infinito, ponendo per esempio

$$v_i = \frac{u_i - \alpha}{\beta - u_i} , \quad \text{ossia} \quad u_i = \frac{\alpha + \beta v_i}{1 + v_i} .$$

Prendiamo, per fare un caso particolare, $n = 3$; allora sarà

$$H\frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\,\Gamma(m_3)}{\Gamma(m)}$$

$$=\int_{a_1}^{a_2} U_1 du_1 \int_{a_2}^{a_3} U_2 u_2 du_2 - \int_{a_1}^{a_2} U_1 u_1 du_1 \int_{a_2}^{a_3} U_2\, du_2\,,$$

e

$$m = m_1 + m_2 + m_3\,,$$

$$H = (a_2 - a_1)^{m_1+m_2-1}(a_3 - a_1)^{m_1+m_3-1}(a_3 - a_2)^{m_2+m_3-1}\,,$$

$$U_1 = (u_1 - a_1)^{m_1-1}\;(a_2 - u_1)^{m_2-1}\;(a_3 - u_1)^{m_3-1}\,,$$

$$U_2 = (u_2 - a_1)^{m_1-1}\;(u_2 - a_2)^{m_2-1}\;(a_3 - u_2)^{m_3-1}\,;$$

se inoltre si trasformano gl'integrali in modo che i loro limiti siano zero e l'infinito, adoperando per semplicità una sola variabile v, e ponendo

$$\frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} = c\,, \quad \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = 1 - c = c'\,,$$

dopo alcune agevoli riduzioni si troverà

$$\frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\,\Gamma(m_3)}{\Gamma(m)}$$

$$=c\int_0^\infty v^{m_1-1}\,dv\,\frac{(1+cv)^{m_3-1}}{(1+v)^{m-1}}\cdot\int_0^\infty v^{m_3-1}\,dv\,\frac{(1+c'v)^{m_1-1}}{(1+v)^m}$$

$$+\,c'\int_0^\infty v^{m_3-1}\,dv\,\frac{(1+c'v)^{m_1-1}}{(1+v)^{m-1}}\cdot\int_0^\infty v^{m_1-1}\,dv\,\frac{(1+cv)^{m_3-1}}{(1+v)^m}\,,$$

che é identica ad una formula ottenuta da Abel e citata dal Sig. W. Roberts, e si cambia diffatti in essa col solo porre

$$m_1 = 1 - \alpha, \quad m_3 = 1 - \beta, \quad m = 1 + \gamma,$$
$$m_2 = \alpha + \beta + \gamma - 1, \quad c = a.$$

(V. la memoria di Abel inserita nel tom. 1. delle sue Opere, pag. 93). Pertanto si scorge che l' equazione (50) contiene appunto quell'ampliazione del teorema d'Abel alla quale alludeva il Sig. Roberts (*Journ. de Liouville*, tom. 16, pag. 143-144).

La stessa equazione comprende poi come casi particolari le formule che il Signor Catalan indicava potersi dedurre dal suo metodo col sostituire nell'equazione (24) all'esponente 2 altri esponenti superiori per trasformar l'integrale

$$\int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n .$$

Sia in secondo luogo

$$X = 1 - \frac{z_1}{b - a_1} - \frac{z_2}{b - a_2} - \ldots - \frac{z_{n-1}}{b - a_{n-1}},$$

ove b rappresenta una costante positiva compresa tra a_{n-1} e a_n : si avrà

$$h_i = \frac{a - a_i}{a_n - a_i}(b - a_i), \quad \alpha_i = 1 - \frac{b - a_i}{a_n - a_i} = \frac{a_n - b}{a_n - a_i},$$

e inoltre dalla dottrina dello spezzamento delle frazioni razionali, avendo riguardo alla formula (48), si trarrà

$$\frac{(b - u_1)(b - u_2) \ldots (b - u_{n-1})}{(b - a_1)(b - a_2) \ldots (b - a_{n-1})} = X,$$

onde si raccoglie che i limiti delle variabili $u_1, u_2, .., u_{n-1}$ saranno per ordine a_1 e a_2, a_2 e a_3 . . . a_{n-1} e b. Fatto quindi

$$H = \Pi.(a_n - a_i)^{-\lambda}\,(a_l - a_{l'})^{m_l + m_{l'} - 1}\,(b - a_i)^{m_n + m_i - 1},$$

$$U_l = (b - u_l)^{m_n - 1}\,R_l\,.$$

le formule (45) e (49) daranno

$$(51)\quad H\frac{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_n)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(m-\lambda)}\int_0^\infty \frac{1}{(1+v)^{m_n}}\,\frac{v^{\lambda-1}dv}{(1+\alpha_1 v)^{m_1}(1+\alpha_2 v)^{m_2}..(1+\alpha_{n-1}v)^{m_{n-1}}}$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} U_1 du_1 \int_{a_2}^{a_3} U_2 du_2 \ldots \int_{a_{n-1}}^{b} U_{n-1}\, du_{n-1}\, \Pi(u_l - u_{l'})\,.$$

Sarà facile ridurre tra i limiti 0 e 1 l'integrale del primo membro, o stendere quelli del secondo tra i limiti 0 e ∞. La formula (50) può considerarsi come compresa nella (51), poichè per dedurla da questa basta farvi $b = a_n$; e perciò la formula di Abel sarà un caso particolare di quella che si ottiene prendendo nella (51) $n = 3$.

Supposto $n = 3$, l'integrale contenuto nel primo membro di questa medesima equazione diviene

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+v)^{m_3}}\,\frac{v^{\lambda-1}\,dv}{(1+\alpha_1 v)^{m_1}(1+\alpha_2 v)^{m_2}},$$

ed è $\alpha_1 < \alpha_2 < 1$. Si faccia $v = \operatorname{tang}^2\varphi$: questo integrale si trasformerà in

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(\operatorname{sen}\varphi)^{2\lambda-1}\,(\cos\varphi)^{2\mu-1}\,d\varphi}{(1-(1-\alpha_1)\operatorname{sen}^2\varphi)^{m_1}(1-(1-\alpha_2)\operatorname{sen}^2\varphi)^{m_2}},$$

dove abbiam fatto

$$\mu = m_1 + m_2 + m_3 - \lambda\,.$$

Se prendesi

$$m_1 = 1 \,,\ m_2 = \tfrac{1}{2} \,,\ 2\lambda - 1 \quad \text{e} \quad 2\mu - 1$$

eguali a zero, oppure a numeri interi e pari, si ridurrà l'integrale ottenuto ad una funzione ellittica completa di terza specie, il cui modulo sarà $\sqrt{(1-\alpha_2)}$, e il parametro $-(1-\alpha_1)$, sicchè, essendo $1-\alpha_1 > 1-\alpha_2$, la funzione avrà un parametro circolare. Se all'incontro si prende

$$m_1 = \tfrac{1}{2} \quad \text{e} \quad m_2 = 1 \,,$$

il modulo sarà $\sqrt{(1-\alpha_1)}$, e il parametro $-(1-\alpha_2)$, e quindi la funzione godrà d'un parametro logaritmico.

Sia

$$m_1 = \tfrac{1}{2} \,,\quad m_2 = 1 \,,\quad \lambda = m_3 = \tfrac{1}{2} \,,\quad 1 - \alpha_1 = c^2 \,,$$

onde

$$2\lambda - 1 = 0 \,,\quad 2\mu - 1 = 2 :$$

sarà più semplice fare

$$v = \frac{\cot^2\omega}{c'^2} \,,\quad c'^2 = 1 - c^2 = \alpha_1 \,,$$

e

$$1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = c^2 \operatorname{sen}^2\theta \,,$$

e allora il primo membro della (51) conterrà la funzione

$$\Pi(-c^2\operatorname{sen}^2\theta, c).$$

Poscia preso $a_1 = 0$, si avrà

$$b = a_3 c^2 \,,\quad a_2 = a_3 c^2 \operatorname{sen}^2\theta \,,$$

e ponendo

$$u_1 = b\operatorname{sen}^2\varphi \,,\quad u_2 = b\operatorname{sen}^2\psi \,,$$

si farà dipendere il secondo membro dalle funzioni

$$F(c) \,,\quad E(c) \,,\quad F(c, \theta) \,,\quad E(c, \theta),$$

in guisa che si otterrà la riduzione della funzione ellittica completa

$$\Pi(-c^2\mathrm{sen}^2\theta, c)$$

di terza specie, e a parametro logaritmico.

Risultamenti conformi emergeranno per le funzioni di parametro circolare, e così a funzioni d'entrambi i caratteri conduce la formula (51), e si ottiene da essa la riduzione delle une e delle altre a funzioni ellittiche di prima e seconda specie; laonde questa formula esprime un teorema assai più generale spettante ai trascendenti iperellittici.

12° Si ponga

$$R = (1+a_1 t^{\frac{1}{r}})^{m_1}(1+a_2 t^{\frac{1}{r}})^{m_2} \ldots (1+a_n t^{\frac{1}{r}})^{m_n} :$$

dalle formule (22) e (40) si dedurrà

$$\int x_n^{m_n-1}\left(1-\frac{1}{(1+\rho t^{\frac{1}{r}})^m}\right). x_1^{m_1-1}\,dx_1 .\, x_2^{m_2-1}\,dx_2 \ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-1}\,dx_{n-1}$$

$$= \frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\,\ldots\,\Gamma(m_n)}{\Gamma(m)}\left(1-\frac{1}{R}\right).$$

Si moltiplichi questa equazione per $t^{-\frac{1}{r}}dt$, e s'integri fra i limiti $t=0$, $t=\infty$: si avrà primieramente col mezzo dell'integrazione per parti

$$\int\left(1-\frac{1}{(1+\rho t^{\frac{1}{r}})^m}\right) t^{-\frac{1}{r}}\,dt = \left(1-\frac{1}{(1+\rho t^{\frac{1}{r}})^m}\right)\frac{t^{1-\frac{1}{r}}}{1-\frac{1}{r}}$$

$$+\frac{m\rho}{1-r}\int\frac{dt}{(1+\rho t^{\frac{1}{r}})^{1+m}},$$

$$\int\left(1-\frac{1}{R}\right)t^{-\frac{1}{r}}dt=\left(1-\frac{1}{R}\right)\frac{t^{1-\frac{1}{r}}}{1-\frac{1}{r}}$$

$$+\frac{1}{1-r}\int\left(\frac{m_1a_1}{1-a_1t^{\frac{1}{r}}}+\frac{m_2a_2}{1+a_2t^{\frac{1}{r}}}+\ldots+\frac{m_n\,a_n}{1+a_nt^{\frac{1}{r}}}\right)\frac{dt}{R},$$

e poi supponendo $0<r<1$, se ne trarrà

$$\int_0^\infty\left(1-\frac{1}{(1+\rho t^{\frac{1}{r}})^m}\right)t^{-\frac{1}{r}}dt=\frac{m\rho}{1-r}\int_0^\infty\frac{dt}{(1+\rho t^{\frac{1}{r}})^{1+m}}.$$

$$\int_0^\infty\left(1-\frac{1}{R}\right)t^{-\frac{1}{r}}dt$$

$$=\frac{1}{1-r}\int_0^\infty\left(\frac{m_1a_1}{1+a_1t^{\frac{1}{r}}}+\frac{m_2a_2}{1+a_2t^{\frac{1}{r}}}+\ldots+\frac{m_na_n}{1+a_nt^{\frac{1}{r}}}\right)\frac{dt}{R}.$$

Nel secondo membro della prima di queste formule, facciamo $\frac{1}{1+\rho t^{\frac{1}{r}}}=v$: lo ridurremo a

$$\frac{mr}{1-r}\rho^{1-r}.\int_0^1 v^{m-r}(1-v)^{r-1}\,dv=\frac{mr}{1-r}\;\frac{\Gamma(r)\,\Gamma(m-r+1)}{\Gamma(1+m)}.\rho^{1-r};$$

nel secondo membro della seconda equazione si faccia $t=v^r$, e

$$S=(1+a_1v)^{m_1}(1+a_2v)^{m_2}\ldots.(1+a_nv)^{m_n};$$

indi eseguite le sostituzioni e riduzioni, si troverà

in guisa che si otterrà la riduzione della funzione ellittica completa

$$\Pi(-c^2\operatorname{sen}^2\theta, c)$$

di terza specie, e a parametro logaritmico.

Risultamenti conformi emergeranno per le funzioni di parametro circolare, e così a funzioni d' entrambi i caratteri conduce la formula (51), e si ottiene da essa la riduzione delle une e delle altre a funzioni ellittiche di prima e seconda specie; laonde questa formula esprime un teorema assai più generale spettante ai trascendenti iperellittici.

12° Si ponga

$$R = (1+a_1 t^{\frac{1}{r}})^{m_1}(1+a_2 t^{\frac{1}{r}})^{m_2}\ldots(1+a_n t^{\frac{1}{r}})^{m_n}:$$

dalle formule (22) e (40) si dedurrà

$$\int x_n^{m_n-1}\left(1-\frac{1}{(1+\rho t^{\frac{1}{r}})^m}\right) . x_1^{m_1-1}\, dx_1 . x_2^{m_2-1}\, dx_2 \ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-1}\, dx_{n-1}$$

$$= \frac{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_n)}{\Gamma(m)}\left(1-\frac{1}{R}\right).$$

Si moltiplichi questa equazione per $t^{-\frac{1}{r}}dt$, e s'integri fra i limiti $t=0$, $t=\infty$: si avrà primieramente col mezzo dell'integrazione per parti

$$\int\left(1-\frac{1}{(1+\rho t^{\frac{1}{r}})^m}\right) t^{-\frac{1}{r}}\, dt = \left(1-\frac{1}{(1+\rho t^{\frac{1}{r}})^m}\right)\frac{t^{1-\frac{1}{r}}}{1-\frac{1}{r}}$$

$$+\frac{m\rho}{1-r}\int\frac{dt}{(1+\rho t^{\frac{1}{r}})^{1+m}},$$

$$\int\left(1-\frac{1}{R}\right)t^{-\frac{1}{r}}dt=\left(1-\frac{1}{R}\right)\frac{t^{1-\frac{1}{r}}}{1-\frac{1}{r}}$$

$$+\frac{1}{1-r}\int\left(\frac{m_1a_1}{1-a_1t^{\frac{1}{r}}}+\frac{m_2a_2}{1+a_2t^{\frac{1}{r}}}+\ldots+\frac{m_n\,a_n}{1+a_nt^{\frac{1}{r}}}\right)\frac{dt}{R},$$

e poi supponendo $0<r<1$, se ne trarrà

$$\int_0^\infty\left(1-\frac{1}{(1+\rho t^{\frac{1}{r}})^m}\right)t^{-\frac{1}{r}}dt=\frac{m\rho}{1-r}\int_0^\infty\frac{dt}{(1+\rho t^{\frac{1}{r}})^{1+m}}$$

$$\int_0^\infty\left(1-\frac{1}{R}\right)t^{-\frac{1}{r}}dt$$

$$=\frac{1}{1-r}\int_0^\infty\left(\frac{m_1a_1}{1+a_1t^{\frac{1}{r}}}+\frac{m_2a_2}{1+a_2t^{\frac{1}{r}}}+\ldots+\frac{m_na_n}{1+a_nt^{\frac{1}{r}}}\right)\frac{dt}{R}.$$

Nel secondo membro della prima di queste formule, facciamo $\frac{1}{1+\rho t^{\frac{1}{r}}}=v$: lo ridurremo a

$$\frac{mr}{1-r}\rho^{1-r}.\int_0^1 v^{m-r}(1-v)^{r-1}\,dv=\frac{mr}{1-r}\,\frac{\Gamma(r)\,\Gamma(m-r+1)}{\Gamma(1+m)}.\rho^{1-r};$$

nel secondo membro della seconda equazione si faccia $t=v^r$, e

$$S=(1+a_1v)^{m_1}(1+a_2v)^{m_2}\ldots.(1+a_nv)^{m_n};$$

indi eseguite le sostituzioni e riduzioni, si troverà

$$(52)\quad \int x_n^{m_n-1}\,\rho^{1-r}\,.\,x_1^{m_1-1}dx_1\,.\,x_2^{m_2-1}dx_2\ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-1}dx_{n-1}$$

$$=\frac{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_n)}{\Gamma(r)\Gamma(m-r+1)}\int_0^\infty\left(\frac{m_1a_1}{1+a_1v}+\frac{m_2a_2}{1+a_2v}+\ldots+\frac{m_na_n}{1+a_nv}\right)\frac{v^{r-1}dv}{S}$$

In questa è compresa come caso particolare la formula (20), sicchè la formula (52) dà il valore d'un integrale multiplo di cui è caso particolare quello del Sig. Catalan, e a cui il metodo usato da questo illustre geometra non sembrerebbe applicabile finché gli esponenti m_n ed r sono diversi l'un dall'altro.

Si può trasformare l'integrale multiplo della formula (52) con la sostituzione delle variabili u_i risultanti dall' equazione (46), e se ne conchiuderanno teoremi sugl'integrali iperellittici o Abeliani, che saranno più generali di quelli che ha ottenuti il Signor Catalan trasformando l'integrale (22).

Osserverò inoltre con lo stesso Sig. Catalan, che da ogni formula trovata altre si dedurranno integrando, o differenziando rispetto a quantità indipendenti dalle variabili; e infine resterebbe a cercare che divengano le medesime formule, quando la grandezza relativa delle costanti a_{n-1}, a_n, a, b non sia quale fu supposta nel 10.°

13.° Indicata con $f(x)$ una funzione qualsivoglia di x, con m_1, m_2 ... m_{n-1} esponenti positivi, e con m la loro somma, avremo dalle formule (3) e (6)

$$\int f\left(\frac{x_n}{\rho}\right)\frac{x_1^{m_1-1}dx_1\,.\,x_2^{m_2-1}dx_2\ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-1}dx_{n-1}}{\rho^{m+1}}$$

$$=\int\frac{1}{a_n}f\left(\frac{y_n}{a_n}\right)\frac{y_1^{m_1-1}dy_1\,.\,y_2^{m_2-1}dy_2\ldots y_{n-1}^{m_{n-1}-1}dy_{n-1}}{a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_{n-1}^{m_{n-1}}},$$

sotto le condizioni (1), (2), (4). Il secondo membro di questa equazione si riduce ad un integrale semplice, mercè la formula (23), essendo

$$f\left(\frac{y_n}{a_n}\right)=f\left(\frac{1}{a_n}-\frac{y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}}{a_n}\right),$$

onde il suo valore è

$$\frac{1}{a_n}\,\frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\,\ldots\,\Gamma(m_{n-1})}{a_1^{m_1}\,a_2^{m_2}\ldots\,a_{n-1}^{m_{n-1}}\,\Gamma(m)}\int_0^1 t^{m-1}f\left(\frac{1-t}{a_n}\right)dt:$$

cambiando quì t in $1-z$, e sostituendo, se ne conchiude

$$(53)\quad \int f\left(\frac{x_n}{\rho}\right)\frac{x_1^{m_1-1}\,dx_1.\,x_2^{m_2-1}\,dx_2\ldots\,x_{n-1}^{m_{n-1}-1}\,dx_{n-1}}{\rho^{m+1}}$$

$$=\frac{1}{a_n}\,\frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\,\ldots\,\Gamma(m_{n-1})}{a_1^{m_1}\,a_2^{m_2}\ldots\,a_{n-1}^{m_{n-1}}\,\Gamma(m)}\int_0^1(1-z)^{m-1}f\left(\frac{z}{a_n}\right)dz.$$

Nei due membri di questa equazione mettiamo generalmente $1+a_i t^{\frac{1}{r}}$ in luogo di a_i, supposto $r>0$, e dopo averli moltiplicati per dt, integriamo da $t=0$, a $t=\infty$, facendo

$$\frac{1}{1+\rho t^{\frac{1}{r}}}=z,$$

avremo

$$\int_0^\infty f\left(\frac{x_n}{1+\rho t^{\frac{1}{r}}}\right)\frac{dt}{(1+\rho t^{\frac{1}{r}})^{m+1}}=\frac{r}{\rho^r}\int_0^1 z^{m-r}(1-z)^{r-1}dz\,f(zx_n);$$

facendo invece

$$\frac{1}{1+a_n t^{\frac{1}{r}}} = v\,,\ a_i - a_n = \alpha_i\,,$$

avremo

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+a_n t^{\frac{1}{r}}} f\left(\frac{z}{1+a_n t^{\frac{1}{r}}}\right) \frac{dt}{(1+a_1 t^{\frac{1}{r}})^{m_1}(1+a_2 t^{\frac{1}{r}})^{m_2}\ldots(1+a_{n-1} t^{\frac{1}{r}})^{m_{n-1}}}$$

$$= r a_n^{m-r} \int_0^1 \frac{v^{m-r}\,(1-v)^{r-1}\,dv f(vz)}{(a_1-\alpha_1 v)^{m_1}(a_2-\alpha_2 v)^{m_2}\ldots(a_{n-1}-\alpha_{n-1} v)^{m_{n-1}}}:$$

è chiaro da ciò, che se si pone

$$(54)\qquad \begin{cases} \varphi(x_n) = \int_0^1 z^{m-r}\,(1-z)^{r-1}\,dz f(zx_n)\,, \\ \psi(v) = \int_0^1 (1-z)^{m-1} dz f(vz)\,, \end{cases}$$

si avrà

$$(55)\qquad \int \frac{\varphi(x_n)}{\rho^r}.\,x_1^{m_1-1}dx_1.x_2^{m_2-1}dx_2\ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-1}dx_{n-1}$$

$$= a_n^{m-r}\frac{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_{n-1})}{\Gamma(m)}\int_0^1 \frac{v^{m-r}(1-v)^{r-1}\,dv\,\psi(v)}{(a_1-\alpha_1 v)^{m_1}(a_2-\alpha_2 v)^{m_2}\ldots(a_{n-1}-\alpha_{n-1} v)^{m_{n-1}}}$$

Questa formula somministra la (42), se si prende

$$f(x) = x^{m_n - 1};$$

se poi si prende $r = m$, il che dà, per le (54),

$$\psi(x) = \varphi(x)\,,$$

ponendo

$$\varphi(x) = F(1-x)\,,\quad v = 1-t\,,$$

si ottiene

$$(56)\quad \int \frac{x_1^{m_1-1}dx_1 \,.\, x_2^{m_2-1}dx_2 \ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-1}dx_{n-1}}{(a_n+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_{n-1}x_{n-1})^m} F(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})$$

$$= \frac{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_{n-1})}{\Gamma(m)} \int_0^1 \frac{t^{m-1}F(t)dt}{(a_n+\alpha_1 t)^{m_1}(a_n+\alpha_2 t)^{m_2}\ldots(a_n+\alpha_{n-1}t)^{m_{n-1}}}$$

formula data dal Sig. Schlömilch negli *Annali* del Sig. Prof. Tortolini (1852, p. 328). L'integrale multiplo del primo membro suppone

$$0 < x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} < 1,$$

ma é facile ai limiti 0 e 1 sostituirne altri due positivi A e B presi ad arbitrio, quali sono adoperati dal Sig. Schlömilch, dappoichè cambiando generalmente x_i in $\frac{x_i}{A}$ si avranno per limiti 0 e A, cambiando x_i in $\frac{x_i}{B}$ si avranno per limiti 0 e B, e infine, sottraendo, si troveranno i limiti A e B. La formula del Sig. Schlömilch è dunque un caso particolare della nostra (55); anzi egli nella sua dimostrazione ammette che i coefficienti α, β, γ .... siano positivi, mentre nella formula (56) ogni coefficiente α_i può esser positivo, o negativo, bastando che siano positivi a_1, a_2, ... a_n.

Si differenzino rispetto ad a_n, considerando come costanti α_1, α_2, . . . α_{n-1} i due membri della (56), e poscia si faccia

$$t = \frac{a_n v}{1+a_n v}, \quad F(x) = f(1-x),$$

$$R = (1+a_1 v)^{m_1}(1+a_2 v)^{m_2}\ldots(1+a_{n-1}v)^{m_{n-1}}:$$

si otterrà

$$(57)\quad \int \frac{f(x_n)}{\rho^{m+1}} \cdot x_1^{m_1-1}\, dx_1 . x_2^{m_2-1}\, dx_2 \ldots x_{n-1}^{m_{n-1}-1}\, dx_{n-1}$$

$$= \frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_{n-1})}{a_n\Gamma(m+1)} \int_0^\infty \left(\frac{m_1}{1+a_1 v} + \frac{m_2}{1+a_2 v} + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{m_{n-1}}{1+a_{n-1}v}\right) v^{m-1} f\left(\frac{1}{1+a_n v}\right)\frac{dv}{R} .$$

Ma le formule (3) e (6) cambiano il primo membro in

$$\int \frac{1}{a_n} f\left(\frac{\rho y_n}{a_n}\right) \frac{y_1^{m_1-1}\, dy_1 . y_2^{m_2-1}\, dy_2 \ldots y_{n-1}^{m_{n-1}-1}\, dy_{n-1}}{a_1^{m_1}\, a_2^{m_2} \ldots a_{n-1}^{m_{n-1}}} ,$$

ove bisogna sostituire a ρ l'espressione (5) : dunque

$$(58)\quad \int f\left(\frac{\rho y_n}{a_n}\right) y_1^{m_1-1} dy_1 . y_2^{m_2-1} dy_2 \ldots y_{n-1}^{m_{n-1}-1} dy_{n-1}$$

$$= a_1^{m_1}\, a_2^{m_2} \ldots a_{n-1}^{m_{n-1}} . \frac{\Gamma(m_1)\Gamma(m_2)\ldots\Gamma(m_{n-1})}{\Gamma(m+1)} \int_0^\infty \left(\frac{m_1}{1+a_1 v} + \frac{m_2}{1+a_2 v}\right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{m_{n-1}}{1+a_{n-1}v}\right) v^{m-1} f\left(\frac{1}{1+a_n v}\right)\frac{dv}{R} ,$$

formula da cui dipende come caso particolarissimo la (22).

Le funzioni φ e ψ che entrano nella formula (55) sono determinate dalle (54) per mezzo d'una terza funzione f: ma si può evitar l'uso di questa funzione sussidiaria, poichè con un metodo insegnato da Abel (*Oevres*, tom. I, p. 27), e dal Sig. Liouville (*Journal de Math.*, t. IV, p. 232—235), si può trarre il valore di $f(v)$ dalla seconda delle (54), e sostituendolo indi nella prima si avra φ espressa direttamente per ψ

Torino 25 Agosto 1853.

INTORNO AD ALCUNI TEOREMI DI GEOMETRIA

MEMORIA

DEL SIG. PROF. F. BRIOSCHI

PARTE PRIMA

Dalla teorica dei determinanti, ponendo

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_1\beta-\alpha\beta_1 & \alpha_2\beta-\alpha\beta_2 & \alpha_3\beta-\alpha\beta_3 & \dots \\ 0 & \beta_1\gamma-\beta\gamma_1 & \beta_2\gamma-\beta\gamma_2 & \beta_3\gamma-\beta\gamma_3 & \dots \\ 0 & \gamma_1\delta-\gamma\delta_1 & \gamma_2\delta-\gamma\delta_2 & \gamma_3\delta-\gamma\delta_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$B=\begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots \\ \delta & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \qquad C=\begin{vmatrix} \lambda & \beta & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -\alpha & \gamma & 0 & \dots \\ \nu & 0 & -\beta & \delta & \dots \\ \xi & 0 & 0 & -\gamma & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

e supponendo che le indeterminate λ, μ, ν, ξ .... soddisfino le equazioni :

$$\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu+\delta\xi\ \dots\ =1$$

$$\alpha_1\lambda+\beta_1\mu+\gamma_1\nu+\delta_1\xi\ \dots\ =0$$

$$\alpha_2\lambda+\beta_2\mu+\gamma_2\nu+\delta_2\xi\ \dots\ =0 \quad \text{cc.}$$

si ha

$$A = BC \qquad (*)$$

Notisi che ritenendo essere n il numero delle α, α_1, α_2.... risulta :

$$C = (-1)^{n+1}\,\beta\gamma\delta\ ....$$

e quindi supposte

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \ldots = 1\,,$$

e considerando solamente i primi sedici elementi del determinante B si ha:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} \alpha_1-\beta_1 & \alpha_2-\beta_2 & \alpha_3-\beta_3 \\ \beta_1-\gamma_1 & \beta_2-\gamma_2 & \beta_3-\gamma_3 \\ \gamma_1-\delta_1 & \gamma_2-\delta_2 & \gamma_3-\delta_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ 1 & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{vmatrix}$$

Il determinante del secondo membro rappresenta il sestuplo del volume della piramide i vertici della quale hanno per coordinate le

$$\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \alpha_3\,;\quad \beta_1\,,\ \beta_2\,,\ \beta_3;\quad \gamma_1\,,\ \gamma_2\,,\ \gamma_3\,;\quad \delta_1\,,\ \delta_2\,,\ \delta_3.$$

Ora se con λ, μ, ν si indicano le lunghezze di quegli spigoli di essa piramide, i quali hanno i termini nel primo e secondo, secondo e terzo, terzo e quarto dei punti suddetti, e se con a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3 si indicano i coseni degli angoli che quegli spigoli fanno ordinatamente cogli assi ortogonali; dall'equazione (1) si avrà :

(*) Di queste relazioni fece già uso il Sig. Hermite in una importante ricerca nella teoria dei numeri. Vedi Journal de Liouville. T. 14.

$$\lambda\mu\nu \begin{vmatrix} a_1\,, & b_1\,, & c_1 \\ a_2\,, & b_2\,, & c_2 \\ a_3\,, & b_3\,, & b_3 \end{vmatrix} = \pm\, 6\mathrm{V}$$

e quindi essendo :

$$\begin{vmatrix} a_1\,, & b_1\,, & c_1 \\ a_2\,, & b_2\,, & c_2 \\ a_3\,, & b_3\,, & c_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & (\lambda\mu) & (\lambda\nu) \\ (\lambda\mu) & 1 & (\mu\nu) \\ (\lambda\nu) & (\mu\nu) & 1 \end{vmatrix}$$

nella quale $(\lambda\mu)$ indica il coseno dell'angolo compreso dagli spigoli λ, μ; risulta :

$$\mathrm{V} = \frac{1}{6}\lambda\mu\nu\sqrt{\left(1-(\lambda\mu)^2-(\lambda\nu)^2-(\mu\nu)^2+2(\lambda\mu)\,(\lambda\nu)\,(\mu\nu)\right)}.$$

Osserviamo che indicando con ω , θ , η i coseni degli angoli che una perpendicolare al piano determinato degli spigoli di λ, μ fa cogli assi si hanno le relazioni :

$$(2) \qquad \omega = \pm\frac{b_1c_2-b_2c_1}{\mathrm{sen}\,\lambda\mu}, \quad \theta = \pm\frac{c_1a_2-c_2a_1}{\mathrm{sen}\,\lambda\mu}, \quad \eta = \pm\frac{a_1b_2-a_2b_1}{\mathrm{sen}\,\lambda\mu} \,,$$

quindi

$$(3) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \pm\mathrm{sen}\lambda\mu(a_3\omega+b_3\theta+c_3\eta) = \pm\mathrm{sen}\lambda\mu\ \mathrm{sen}\lambda\nu\,\mathrm{sen}(\lambda\mu,\ \mu\eta)$$

nella quale il simbolo $(\lambda\mu,\ \mu\nu)$ dinota l'angolo diedro compreso dalle faccie determinate degli spigoli di λ, μ ; μ, ν. Si avrà per conseguenza :

$$\mathrm{V} = \frac{1}{6}\ \lambda\mu\nu\,\mathrm{sen}\,\lambda\mu\ \mathrm{sen}\,\mu\nu\,\mathrm{sen}(\lambda\mu,\ \mu\nu)\,,$$

e da questa se con A, B si denotano le aree di quelle faccie si avrà la nota formola:

$$V = \frac{2}{3} \frac{AB}{\mu} \operatorname{sen}(\lambda\mu, \mu\nu).$$

Se con λ_1, μ_1, ν_1 si indicano gli spigoli della piramide che uniscono i punti secondo e quarto, quarto e primo, primo e terzo; e con a', b', c', ... si indicano i coseni degli angoli, che gli spigoli medesimi fanno coi tre assi; osservando all'equazione:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\lambda\lambda_1) & (\lambda\mu_1) & (\lambda\nu_1) \\ (\mu\lambda_1) & (\mu\mu_1) & (\mu\nu_1) \\ (\nu\lambda_1) & (\nu\mu_1) & (\nu\nu_1) \end{vmatrix}$$

e chiamando H per brevità il determinante del secondo membro, si avrà:

$$V^2 = \frac{1}{36} \lambda\mu\nu\, \lambda_1 \mu_1 \nu_1 H .$$

Questa penultima equazione, avuto riguardo alla (3) dà facilmente:

$$\operatorname{sen}\lambda\mu \operatorname{sen}\lambda_1\mu_1 \operatorname{sen}\mu\nu \operatorname{sen}\mu_1\nu \operatorname{sen}(\lambda\mu, \mu\nu) \operatorname{sen}(\lambda_1\mu_1, \mu_1\nu_1) = H.$$

Singolare relazione la quale venne già dimostrata dal Chiarissimo Sig. Prof. Bordoni in una nota alla seconda edizione del trattato di Geodesia. Chiamo R, S i determinanti del primo membro delle (4) ed ω_1, θ_1, η_1 i coseni degli angoli che la perpendicolare al piano determinato dagli spigoli λ_1. μ_1, fa coi tre assi: dalla medesima equazione (4) si ha:

$$\frac{dR}{da_3} \frac{dS}{d\alpha_3} + \frac{dR}{db_3} \frac{dS}{d\beta_3} + \frac{dR}{dc_3} \frac{dS}{dc'''} = \frac{dH}{d(\nu\nu_1)}$$

ossia avuto riguardo alle equazioni (2) :

$$\text{sen}\,\lambda\mu\ \text{sen}\lambda_1\mu_1\,(\omega\omega_1+\theta\theta_1+\eta\eta_1)=(\lambda\lambda_1)(\mu\mu_1)-(\lambda\mu_1)(\mu\lambda_1)$$

od anche

$$\text{sen}\lambda\mu\ \text{sen}\lambda_1\mu_1\,\cos(\lambda\mu_1\,,\,\lambda_1\,\mu_1)=(\lambda\lambda_1)(\mu\mu_1)-(\lambda\mu_1)(\lambda_1\mu)$$

Questa relazione, e le sue analoghe sono pure dovute al Sig. Prof. Bordoni.

Indicando con h la minima distanza fra gli spigoli opposti λ, ν il primo membro dell'equazione (1) è eguale a :

$$h\,\lambda\nu\,\text{sen}\,\lambda\nu\,,$$

quindi si avrà la nota formola :

$$V=\pm\frac{1}{6}\,h\,\lambda\nu\,\text{sen}\,\lambda\nu.$$

Considerando i primi nove elementi della formola (1), e posto

$$\alpha_1=\frac{x_1}{a}\,,\qquad \beta_1=\frac{x_2}{a}\,,\qquad \gamma_1=\frac{x_3}{a}\,,$$

$$\alpha_2=\frac{y_1}{b}\,,\qquad \beta_2=\frac{y_2}{b}\,,\qquad \gamma_2=\frac{y_3}{b}\,,$$

si ha la equazione :

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{x_1-x_2}{a} & \dfrac{y_1-y_2}{b} \\ \dfrac{x_2-x_3}{a} & \dfrac{y_2-y_3}{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{x_1}{a} & \dfrac{y_1}{b} \\ 1 & \dfrac{x_2}{a} & \dfrac{y_2}{b} \\ 1 & \dfrac{x_3}{a} & \dfrac{y_3}{b} \end{vmatrix}$$

Se si suppongono x_1, y_1 ; x_2, y_2 ; x_3, y_3 essere coordinate

di tre punti situati sopra la ellisse di cui i semiassi sono a, b; indicando con A l'area del triangolo avente i vertici in quei tre punti; il secondo membro di quest' ultima equazione é eguale a:

$$\pm\frac{2A}{ab}.$$

Ora se con λ, μ, ν si indicano i lati del triangolo, con l, m, n i semidiametri paralleli si hanno:

$$\frac{(x_1-x_2)^2}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)^2}{b^2}=\frac{\nu^2}{n^2},$$

$$\frac{(x_3-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y_3-y_1)^2}{b^2}=\frac{\mu^2}{m^2},$$

$$\frac{(x_2-x_3)^2}{a^2}+\frac{(y_2-y_3)^2}{b^2}=\frac{\lambda^2}{l^2};$$

quindi quadrando la equazione (5) si avrà:

$$\frac{4A^2}{a^2b^2}=\begin{vmatrix}\frac{\nu^2}{n^2}, & \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{m^2}-\frac{\lambda^2}{l^2}-\frac{\nu^2}{n^2}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{m^2}-\frac{\lambda^2}{l^2}-\frac{\nu^2}{n^2}\right), & \frac{\lambda^2}{l^2}\end{vmatrix}$$

da cui

$$A=\frac{1}{4}ab\sqrt{\left[\left(\frac{\lambda}{l}+\frac{\mu}{m}+\frac{\nu}{n}\right)\left(\frac{\lambda}{l}+\frac{\mu}{m}-\frac{\nu}{n}\right)\left(\frac{\lambda}{l}-\frac{\mu}{m}+\frac{\nu}{n}\right)\left(-\frac{\lambda}{l}+\frac{\mu}{m}+\frac{\nu}{n}\right)\right]}$$

Rammentando la espressione dell'area di un triangolo inscritto in una ellisse dovuta a Mac-Cullagh ed a Joachimsthal la quale é:

$$(6) \qquad A = \frac{1}{4} ab \frac{\lambda\mu\nu}{lmn}$$

si ha una relazione fra i lati del triangolo inscritto, ed i semidiametri rispettivamente paralleli. Analogamente dalla equazione (1) si ha:

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1-x_2}{a} & \frac{y_1-y_2}{b} & \frac{z_1-z_2}{c} \\ \frac{x_2-x_3}{a} & \frac{y_2-y_3}{b} & \frac{z_2-z_3}{c} \\ \frac{x_3-x_4}{a} & \frac{y_3-y_4}{b} & \frac{z_3-z_4}{c} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} & \frac{z_1}{c} \\ 1 & \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} & \frac{z_2}{c} \\ 1 & \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} & \frac{z_3}{c} \\ 1 & \frac{x_4}{a} & \frac{y_4}{b} & \frac{z_4}{c} \end{vmatrix} = \pm \frac{6V}{abc}$$

indicando con V il volume della piramide inscritta nell'Ellissoide di cui i semiassi sono a, b, c. Quadrando quest'ultima equazione si ha:

$$\frac{36V^2}{a^2 b^2 c^2} = \begin{vmatrix} \frac{\lambda^2}{l^2}, & A, & B \\ A, & \frac{\nu^2}{n^2}, & C \\ B, & C, & \frac{\lambda^2_1}{l^2_1} \end{vmatrix}$$

avendo posto per brevità:

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{m^2}-\frac{\lambda^2}{l^2}-\frac{\nu^2}{n^2}\right),$$

$$B=\frac{1}{2}\left(\frac{\nu^2}{n^2}+\frac{\nu^2_1}{n^2_1}-\frac{\mu^2}{m^2}-\frac{\mu^2_1}{m^2_1}\right),$$

$$C=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2_1}{m^2_1}-\frac{\lambda^2_1}{l^2_1}-\frac{\nu^2}{n^2}\right);$$

ossia

$$V=\frac{abc}{12}\sqrt{\left[\left(\frac{\lambda^2}{l^2}+\frac{\lambda^2_1}{l^2_1}\right)\left(\frac{\mu^2\mu^2_1}{m^2m^2_1}+\frac{\nu^2\nu^2_1}{n^2n^2_1}-\frac{\lambda^2\lambda^2_1}{l^2l^2_1}-\frac{\mu^2_1\,\nu^2_1}{m^2_1\,n^2_1}\right)\right.}$$

$$+\left(\frac{\mu^2}{m^2}+\frac{\mu^2_1}{m^2_1}\right)\left(\frac{\lambda^2\,\lambda^2_1}{l^2\,l^2_1}+\frac{\nu^2\,\nu^2_1}{n^2\,n^2_1}-\frac{\mu^2\mu^2_1}{m^2m^2_1}-\frac{\lambda^2_1\,\nu^2_1}{l^2_1\,n^2_1}\right)$$

$$+\left(\frac{\nu^2}{n^2}+\frac{\nu^2_1}{n^2_1}\right)\left(\frac{\lambda^2\,\lambda^2_1}{l^2\,l^2_1}+\frac{\mu^2\mu^2_1}{m^2m^2_1}-\frac{\nu^2\,\nu^2_1}{n^2\,n^2_1}-\frac{\mu^2_1\,\lambda^2_1}{m^2_1\,l^2_1}\right)$$

$$\left.-\frac{\lambda^2\mu^2\nu^2}{l^2m^2n^2}+3\,\frac{\lambda^2_1\,\mu^2_1\,\nu^2_1}{l^2_1\,m^2_1\,n^2_1}\right].$$

Le λ, μ, ν; λ_1, μ_1, ν_1 come vedesi facilmente sono gli spigoli della piramide, e le l, m, n; l_1, m_1, n_1 i semidiametri paralleli.

La espressione trovata del Sig. Joachimsthal pel volume della piramide inscritta nell'Ellissoide è più simmetrica della superiore, ed ha la stessa forma di quella trovata più sopra per l'area del triangolo inscritto nell'ellisse. Questa espressione è la seguente :

$$V=\frac{abc}{24}\sqrt{\left[\left(\frac{\lambda\lambda_1}{ll_1}+\frac{\mu\mu_1}{mm_1}+\frac{\nu\nu_1}{nn_1}\right)\left(\frac{\lambda\lambda_1}{ll_1}+\frac{\mu\mu_1}{mm_1}-\frac{\nu\nu_1}{nn_1}\right)\right.}$$

$$\left.\left(\frac{\lambda\lambda_1}{ll_1}-\frac{\mu\mu_1}{mm_1}+\frac{\nu\nu_1}{nn_1}\right)\left(-\frac{\lambda\lambda_1}{ll_1}+\frac{\mu\mu_1}{mm_1}+\frac{\nu\nu_1}{nn_1}\right)\right],$$

la quale insieme alla superiore danno una relazione fra gli spigoli della piramide, ed i semidiametri paralleli. Se nel caso del triangolo poniamo per brevità:

$$a = \frac{\lambda}{l}, \quad b = \frac{\mu}{m}, \quad c = \frac{\nu}{n}$$

e nel caso della piramide:

$$a = \frac{\lambda\lambda_1}{ll_1}, \quad b = \frac{\mu\mu_1}{mm_1}, \quad c = \frac{\nu\nu_1}{nn_1}$$

le quantità sotto il segno radicale nelle espressioni dell'area e del volume di quel triangolo e di quella piramide saranno rappresentabili col determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Date le equazioni delle rette lati di un triangolo determinare l'area del medesimo?

Sieno

$$(7) \qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

le equazioni dei lati; e si denotino con α_3, β_3; α_2, β_2; α_1, β_1, le coordinate dei punti di intersezione dei lati primo e secondo, primo e terzo, secondo e terzo. Chiamo A l'area del triangolo si avrà:

$$A = \pm \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

e posto per brevità :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

dalle equazioni (7) si hanno le seguenti :

$$\frac{d\Delta}{dc_1}\alpha_1 = \frac{d\Delta}{da_1}, \quad \frac{d\Delta}{dc_1}\beta_1 = \frac{d\Delta}{db_1}, \quad \frac{d\Delta}{dc_2}\alpha_2 = \frac{d\Delta}{da_2} \text{ ec.....}$$

quindi sarà

$$A = \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{d\Delta}{dc_1}\frac{d\Delta}{dc_2}\frac{d\Delta}{dc_3}} \begin{vmatrix} \frac{d\Delta}{da_1} & \frac{d\Delta}{db_1} & \frac{d\Delta}{dc_1} \\ \frac{d\Delta}{da_2} & \frac{d\Delta}{db_2} & \frac{d\Delta}{dc_2} \\ \frac{d\Delta}{da_3} & \frac{d\Delta}{db_3} & \frac{d\Delta}{dc_3} \end{vmatrix}$$

e siccome quest'ultimo determinante è il determinante ad elementi reciproci degli elementi del determinante Δ, quindi sarà, come è noto, eguale a Δ^2 e si avrà ;

$$A = \pm \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\frac{d\Delta}{dc_1}\frac{d\Delta}{dc_2}\frac{d\Delta}{dc_3}}$$

Se d_1, d_2, d_3, d_4 indicassero i parametri analoghi nelle equazioni dei quattro piani, faccie di un tetraedro il volume di esso sarebbe :

$$V = \pm \frac{1}{6} \frac{\Delta^3}{\frac{d\Delta}{dd_1}\frac{d\Delta}{dd_2}\frac{d\Delta}{dd_3}\frac{d\Delta}{dd_4}}$$

essendo :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & e_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

Mediante queste formole si possono determinare l'area del triangolo circoscritto ad una ellisse, ed il volume del tetraedro circoscritto ad un ellissoide allorquando si conoscano le coordinate dei punti di contatto. Sieno :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 :$$

la equazione dell'ellisse; x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 le coordinate dei punti di contatto. Le equazioni dei lati saranno:

$$\frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y-1=0$$

$$\frac{x_2}{a^2}x+\frac{y_2}{b^2}y-1=0$$

$$\frac{x_3}{a^2}x+\frac{y_3}{b^2}y-1=0$$

quindi indicando con H l'area del triangolo inscritto avente i vertici in quei tre punti, ed α, β, γ le aree dei triangoli aventi ciascuno un vertice al centro e per base uno dei lati del triangolo inscritto si avrà :

$$A=\frac{a^2\,b^2}{4}\,\frac{H^2}{\alpha\beta\gamma}\,.$$

Notiamo che indicando con λ, μ, ν i lati del triangolo inscritto, ed l, m, n i semidiametri paralleli : si hanno :

$$\alpha = \frac{ab}{2}\frac{\lambda}{l}\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{l^2}\right)},$$

$$\beta = \frac{ab}{2}\frac{\mu}{m}\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\frac{\mu^2}{m^2}\right)},$$

$$\gamma = \frac{ab}{2}\frac{\nu}{n}\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\frac{\nu^2}{n^2}\right)},$$

e quindi sostituendo:

$$A = \frac{ab}{8}\frac{1}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{l^2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\frac{\mu^2}{m^2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\frac{\nu^2}{n^2}\right)\right]}}\frac{\lambda\mu\nu}{lmn}$$

Ora se con α_1, β_1; α_2, β_2; α_3, β_3; λ_1, μ_1, ν_1; l_1, m_1, n_1, si denotano le coordinate dei vertici degli angoli del triangolo circoscritto, le lunghezze dei lati del medesimo, ed i semidiametri paralleli ai lati stessi si hanno:

$$\alpha_1 = \frac{a^2(y_2-y_3)}{2\alpha},\quad \beta_1 = \frac{b^2(x_3-x_2)}{2\alpha},\quad \alpha_2 = \frac{a^2(y_3-y_1)}{2\beta}\text{ec.}$$

$$\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{a^2}+\frac{(\beta_1-\beta_2)^2}{b^2}=\frac{\nu^2_1}{n^2_1}\text{ ec.}$$

per cui sostituendo si otterranno le:

$$\frac{\lambda_1}{l_1}=\frac{ab}{2}\frac{H}{\beta\gamma},\quad \frac{\mu_1}{m_1}=\frac{ab}{2}\frac{H}{\alpha\gamma},\quad \frac{\nu_1}{n_1}=\frac{ab}{2}\frac{H}{\alpha\beta}.$$

Per queste ultime ha luogo la:

$$\frac{\lambda^2_1\,\mu^2_1\,\nu^2_1}{l^2_1\,m^2_1\,n^2_1}=\frac{A^3}{\alpha\beta\gamma}=\frac{4}{a^2b^2}\frac{A^4}{H^2}$$

e quindi osservata l'equazione (6) si hanno le

$$A^2 = \frac{a^2 b^2}{8} \frac{\lambda\mu\nu\lambda_1 \mu_1 \nu_1}{lmn\, l_1 m_1 n_1}, \qquad H^2 \frac{\lambda_1 \mu_1 \nu_1}{l_1 m_1 n_1} = \frac{1}{2} A^2 \frac{\lambda\mu\nu}{lmn}$$

Se con p, q, r si indicano le lunghezze delle perpendicolari condotte dal centro ai lati del triangolo circoscritto si avranno, come è noto:

$$l_1 p = m_1 q = n_1 r = ab ,$$

e quindi

$$p\lambda_1 : q\mu_1 : r\nu_1 = \alpha : \beta : \gamma$$

Considerando l'Ellissoide rappresentata dall'equazione:

$$(8) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 ,$$

se si chiamano x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2.... le coordinate dei quattro punti di contatto di essa colle faccie di un tetraedro circoscritto, V il volume di questo, U il volume del tetraedro inscritto; α, β, γ, δ i volumi dei tetraedri aventi il vertice nel centro dell'Ellissoide, e per basi le faccie dell'inscritto si ha:

$$(9) \qquad V = \frac{a^2 b^2 c^2}{36} \frac{U^3}{\alpha\beta\gamma\delta} .$$

Indicando con A, B, C, D le aree delle faccie di un tetraedro si hanno facilmente le espressioni:

$$A = \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\frac{d\Delta}{dd_2} \frac{d\Delta}{dd_3} \frac{d\Delta}{dd_4}} \sqrt{(a^2_1 + b^2_1 + c^2_1)} ,$$

$$B = \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{\frac{d\Delta}{dd_1} \frac{d\Delta}{dd_3} \frac{d\Delta}{dd_4}} \sqrt{(a^2_2 + b^2_2 + c^2_2)} , \text{ ec.}$$

Se il tetraedro è il circoscritto all'Ellissoide saranno:

$$A = \frac{a^2 b^2 c^2}{12} \frac{U^2}{\beta\gamma\delta} \sqrt{\left(\frac{x^2_1}{a^4} + \frac{y^2_1}{b^4} + \frac{z^2_1}{c^4}\right)},$$

$$B = \frac{a^2 b^2 c^2}{12} \frac{U^2}{\alpha\gamma\delta} \sqrt{\left(\frac{x^2_2}{a^4} + \frac{y^2_2}{b^4} + \frac{z^2_2}{c^4}\right)}, \text{ ec.}$$

ossia indicando con p_1, p_2, p_3, p_4 le lunghezze delle perpendicolari condotte dal centro dell' Ellissoide alle faccie del tetraedro circoscritto, si hanno le:

$$p_1 A : p_2 B : p_3 C : p_4 D = \alpha : \beta : \gamma : \delta .$$

Indicando con α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2 .... le coordinate dei vertici degli angoli del tetraedro circoscritto; dalle equazioni delle faccie si hanno i valori:

$$\alpha_1 \frac{d\Delta}{dr_1} = \pm a^2 \frac{d\Delta}{dx_1}, \quad \beta_1 \frac{d\Delta}{dr_1} = \pm b^2 \frac{d\Delta}{dy_1}, \quad \gamma_1 \frac{d\Delta}{dr_1} = \pm c^2 \frac{d\Delta}{dz_1}$$

ec. .... essendo posto per brevità:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & r_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & r_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & r_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & r_4 \end{vmatrix}$$

Notiamo che in questa espressione si ha

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$$

per cui risulteranno:

$$\Delta = \pm 6U, \quad \frac{d\Delta}{dr_1} = \pm 6\delta, \quad \frac{d\Delta}{dr_2} = \pm 6\gamma,$$

$$\frac{d\Delta}{dr_3} = \pm 6\beta, \quad \frac{d\Delta}{dr_4} = \pm 6\alpha .$$

I valori superiori danno:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \pm \frac{a^2}{36.\gamma\delta}\left(\frac{d\Delta}{dx_2}\frac{d\Delta}{dr_1} - \frac{d\Delta}{dx_1}\frac{d\Delta}{dr_2}\right),$$

o come é noto dalla teorica dei determinanti:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \pm \frac{a^2}{36.\gamma\delta}\Delta\frac{d^2\Delta}{dx_2\,dr_1} = \pm\frac{a^2}{6}\frac{U}{\gamma\delta}(y_4z_3 - y_3z_4)$$

Indicando con λ_1, λ_2; μ_1, μ_2; ν_1, ν_2 gli spigoli del tetraedro circoscritto; con λ', λ''; μ', μ''; ν', ν'' quelli dell'inscritto; l_1, l_2; m_1, m_2; n_1, n_2; l', l''; m', m''; n', n''; i i semidiametri dell'Ellissoide rispettivamente paralleli a quegli spigoli, si avrà:

$$\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{a^2} + \frac{(\beta_1-\beta_2)^2}{b^2} + \frac{(\gamma_1-\gamma_2)^2}{c^2} = \frac{\lambda^2_1}{l^2_1}$$

e quindi

$$\frac{\lambda^2_1}{{}^2_1} = \frac{U^2}{36.\gamma^2\delta^2}\left(a^2(y_4z_3-y_3z_4)^2 + b^2(z_4x_3-z_3x_4)^2 + c^2(x_4y_3-x_3y_4)^2\right)$$

dalla quale sviluppando ed osservando che le x_3, y_3, z_3; *l* x_4, y_4, z_4 soddisfano all'equazione (8) si ha:

$$\frac{\lambda^2_1}{l^2_1} = \frac{a^2\,b^2\,c^2}{36}\,\frac{U^2}{\gamma^2\,\delta^2}\,\frac{\lambda''^2}{l''^2}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\lambda''^2}{l''^2}\right)$$

In questo modo si ottengono le seguenti sei equazioni:

$$\frac{\lambda_1}{l_1} = \frac{abc}{6}\frac{U}{\gamma\delta}\frac{\lambda''}{l''}L_2, \qquad \frac{\lambda_2}{l_2} = \frac{abc}{6}\frac{U}{\alpha\beta}\frac{\lambda'}{l'}L_1,$$

$$\frac{\mu_1}{m_1} = \frac{abc}{6}\frac{U}{\beta\delta}\frac{\mu''}{m''}M_2, \qquad \frac{\mu_2}{m_2} = \frac{abc}{6}\frac{U}{\alpha\gamma}\frac{\mu'}{m'}M_1,$$

$$\frac{\nu_1}{n_1} = \frac{abc}{6}\frac{U}{\beta\gamma}\frac{\nu''}{n''}N_2, \qquad \frac{\nu_2}{n_2} = \frac{abc}{6}\frac{U}{\alpha\delta}\frac{\nu'}{n'}N_.,$$

nelle quali le L_2, M_2 ..... sono poste per brevità in luogo dei radicali. Da queste equazioni osservando alla (9) si ottiene la:

$$U^3 \frac{\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2}{l_1 l_2 m_1 m_2 n_1 n_2} = V^3 \frac{\lambda'\lambda''\mu'\mu''\nu'\nu''}{l'l''m'm''n'n''} L_1\, L_2\, M_1\, M_2\, N_1\, N_2\,,$$

PARTE SECONDA

Considerando i primi nove elementi della formola (1), e ponendo:

$$\alpha_1 = \frac{1}{m_1 - a_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{m_2 - a_2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{m_1 - b_1} \quad \text{ec.}$$

si ha:

$$M_1 M_2 \begin{vmatrix} (m_1 - c_1)(a_1 - b_1) & (m_2 - c_2)(a_2 - b_2) \\ (m_1 - a_1)(b_1 - c_1) & (m_2 - a_2)(b_2 - c_2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{m_1 - a_1} & \dfrac{1}{m_2 - a_2} \\ 1 & \dfrac{1}{m_1 - b_1} & \dfrac{1}{m_2 - b_2} \\ 1 & \dfrac{1}{m_1 - c_1} & \dfrac{1}{m_2 - c_2} \end{vmatrix}$$

essendo

$$M_1 = (m_1 - a_1)(m_1 - b_1)(m_1 - c_1)$$

$$M_2 = (m_2 - a_2)(m_2 - b_2)(m_2 - c_2).$$

Ora se a_1, b_1, c_1, m_1 si ritengono essere le distanze di quattro punti situati sopra una medesima retta L_1 da un punto di essa; ed analogamente a_2, b_2, c_2, m_2 per un altra

retta L_2 ; il determinante del primo membro eguagliato a zero dà luogo all'equazione :

$$\frac{(m_1 - c_1)(a_1 - b_1)}{(m_1 - a_1)(b_1 - c_1)} = \frac{(m_2 - c_2)(a_2 - b_2)}{(m_2 - a_2)(b_2 - c_2)}$$

la quale esprime la eguaglianza dei rapporti anarmonici di quei due sistemi di quattro punti ; ossia esprime essere le rette L_1 , L_2 divise omograficamente.

Se i punti di cui le distanze sono m_1 , m_2 si suppongono coincidere; e si assume questo punto quale origine di assi coordinati, e le due rette L_1 , L_2 quali assi delle x, e delle y, la equazione superiore darà :

$$\begin{vmatrix} c_1(a_1-b_1) , & c_2(a_2-b_2) \\ a_1(b_1-c_1) , & a_2(b_2-c_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} \\ 1 & \frac{1}{b_1} & \frac{1}{b_2} \\ 1 & \frac{1}{c_1} & \frac{1}{c_2} \end{vmatrix} = 0 .$$

Sussistendo questa equazione le due rette saranno ancora divise omograficamente, e queste ultime equazioni considerate a parte dimostrano due proprietà che si verificano in questo caso.

1.° che i punti di intersezione delle rette le quali uniscono a due a due i punti di divisione corrispondenti ma non omologhi delle rette L_1 , L_2 sono situati in una medesima retta passante per l'origine (Chasles, Géométrie Supérieure, p. 73).

2.° Che le rette le quali uniscono a due a due i punti omologhi di divisione si incontrano in un medesimo punto (Chasles, Géométrie Supérieure, p. 70).

La equazione

$$\begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{m_1 - a_1}, & \frac{1}{m_2 - a_2} \\ 1, & \frac{1}{m_1 - b_1}, & \frac{1}{m_2 - b_2} \\ 1, & \frac{1}{m_1 - c_1}, & \frac{1}{m_2 - c_2} \end{vmatrix} = 0$$

rappresentando la eguaglianza dei rapporti anarmonici di due sistemi di quattro punti conterrà come caso particolare l'involuzione di sei punti (Chasles G. S. pag. 128). Basterà a quest'uopo far coincidere opportunamente due punti della retta L_1 con due punti della retta L_2. Quindi la involuzione di sei punti verrà rappresentata dalle seguenti equazioni :

$$(10) \quad \begin{vmatrix} 1, & \frac{1}{a_2 - a_1}, & \frac{1}{a_1 - a_2} \\ 1, & \frac{1}{a_2 - b_1}, & \frac{1}{a_1 - b_2} \\ 1, & \frac{1}{a_2 - c_1}, & \frac{1}{a_1 - c_2} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ec.}$$

Al §. 4.° del Cap.° XX.° della G. S. il Sig. Chasles dimostra che : quando due lati di un esagono sono divisi omograficamente dagli altri quattro, le tre diagonali che uniscono i vertici opposti passano per un medesimo punto, e reciprocamente. Questo teorema vedesi facilmente essere un corollario della prima proposizione dimostrata qui sopra ; quale corollario della seconda proposizione abbiamo il seguente teorema :

Si immagini l'esagono A B C D E F e si chiami O il punto d'incontro di due lati opposti AB, DE; R il punto d'incon-

tro della diagonale CF e del lato AB, ed S il punto d' incontro di quella diagonale, e del lato ED; allorquando i due sistemi di quattro punti O, R, A, B; O, S, D, E, che si corrispondono rispettivamente avranno i loro rapporti anarmonici eguali; le tre diagonali che uniscono i vertici opposti si incontreranno in un medesimo punto. Anche la proposizione dimostrata dal Sig. Chasles (pag. 304): quando in un esagono ABCDEF i raggi condotti dai due vertici B, E agli altri quattro formano due fasci omografici, i punti di concorso dei lati opposti sono in una medesima retta; è un corollario della prima di quelle proposizioni potendosi sostituire all'omografia dei fasci, la omografia dei punti di intersezione delle rette AC, FD colle rette componenti i fasci medesimi.

Dimostrasi poi facilmente, che in questo caso l'esagono è inscritto in una linea del secondo ordine. Infatti assumendo le rette AC, FD come assi delle y e delle x, ed il loro punto di concorso come origine delle cordinate; indicando con a, c le ordinate dei punti A, C pei quali l'ascissa è nulla, e con f, d le ascisse, dei punti F, D; inoltre con m, n le ordinate dei punti, in cui i lati ED, EF dell'esagono incontrano l'asse delle y, e con r, s le ascisse dei punti, in cui i lati BA, BC incontrano l'asse delle x; e finalmente con x_1, y_1; x_2, y_2 le coordinate dei punti B, E; la eguaglianza dei rapporti anarmonici risultanti dai due sistemi di quattro punti di intersezione darà:

$$\begin{vmatrix} (r-f)(d-s) & (m-a)(c-n) \\ (r-s)(d-f) & (m-n)(c-a) \end{vmatrix}=0.$$

Ma é evidente essere

$$r=\frac{cx_1}{c-y_1},\quad s=\frac{ax_1}{a-y_1};\quad m=\frac{dy_2}{d-x_2},\quad n=\frac{fy_2}{f-x_2}$$

quindi sostituendo e riducendo:

$$\begin{vmatrix} cx_1 + fy_1 - cf, & ax_2 + dy_2 - ad \\ x_1y_1(cf - cx_2 - fy_2), & x_2y_2(ad - ax_1 - dy_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Ora se supponiamo che le x_1, y_1 rappresentino coordinate di un punto qualunque di una linea, quest'ultima equazione sarebbe quella di una linea del secondo ordine, e siccome la equazione stessa è soddisfatta ne viene, che il punto di coordinate x_1, y_1, ossia il punto B é situato sopra questa linea. Inoltre quella equazione è soddisfatta allorquando facciasi:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2; \quad x_1 = 0, \quad y_1 = a;$$

$$x_1 = 0, \quad y_1 = c; \quad x_1 = f, \quad y_1 = 0; \quad x_1 = d_1, \quad y_1 = 0.$$

quindi i punti E, A, C, F, D saranno pure situati su quella linea, cioè l'esagono sarà inscritto in una conica. È questo il teorema di Pascal; da esso deducesi, come é noto, quello di Brianchon che in ogni esagono circoscritto ad una conica le diagonali si intersecano in un medesimo punto.

Allorquando due esagoni sono l'uno inscritto, l'altro circoscritto ad una medesima conica a centro, in modo che i vertici degli angoli dell' inscritto sieno i punti di contatto pel secondo; se le diagonali del primo si segheranno in un medesimo punto, i lati opposti del secondo si segheranno in punti situati sopra una medesima retta. Sieno x_1, y_1; x_2, y_2 . . . le coordinate dei vertici dell' esagono inscritto; la condizione che le diagonali si seghino in uno stesso punto verrà espressa dalla equazione:

$$\begin{vmatrix} x_1y_4 - x_4y_1, & y_1 - y_4, & x_4 - x_1 \\ x_2y_5 - x_5y_2, & y_2 - y_5, & x_5 - x_2 \\ x_3y_6 - x_6y_3, & y_3 - y_6, & x_6 - x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ora indicando con:

$$mx^2 \pm ny^2 = h$$

la equazione di una conica a centro; sarà:

$$mxx_r \pm nyy_r = h$$

la equazione della tangente ad essa al punto di coordinate x_r, y_r; e se α_1, β_1; α_2, β_2; α_3, β_3 dinotano le coordinate dei punti di intersezione dei lati opposti dell'esagono circoscritto si hanno:

$$\alpha_1 = \frac{h}{m} \frac{y_1 - y_4}{x_1y_4 - x_4y_1}, \qquad \beta_1 \pm \frac{h}{n} \frac{x_4 - x_1}{x_1y_4 - x_4y_1} \text{ cc. . .}$$

quindi l'equazione superiore trasformasi nella:

$$\begin{vmatrix} 1, & \alpha_1, & \beta_1 \\ 1, & \alpha_2, & \beta_2 \\ 1, & \alpha_3, & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

la quale appunto dimostra il teorema enunciato (*).

Se si indicano con m_1, a_1, b_1, c_1; m_2, a_2, b_2, c_2 le rette costituenti due fasci, e nella equazione (1) si fanno:

$$\alpha_1 = \cot.m_1a_1, \quad \beta_1 = \cot m_1b_1, \quad \gamma_1 = \cot.m_1c_1$$
$$\alpha_2 = \cot.m_2a_2, \quad \beta_2 = \cot.m_2b_2, \quad \gamma_2 = \cot.m_2c_2$$

si ha:

$$\begin{vmatrix} \cot.m_1a_1 - \cot.m_1b_1, & \cot.m_2a_2 - \cot.m_2b_2 \\ \cot.m_1b_1 - \cot.m_1c_1, & \cot.m_2b_2 - \cot.m_2c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & \cot.m_1a_1, & \cot.m_2a_2 \\ 1, & \cot.m_1b_1, & \cot.m_2b_2 \\ 1, & \cot.m_1c_1, & \cot.m_2c_2 \end{vmatrix}$$

(*) *Vedi la nota alla fine.*

Queste espressioni eguagliate a zero danno luogo a due equazioni la prima delle quali contiene la eguaglianza dei rapporti anarmonici di quei due fasci di rette (Chasles, G. S. pag. 27). La seconda di esse supponendo che le rette m_1, m_2 coincidano senza che ciò abbia luogo pei centri dei due fasci, dimostra che le altre rette di un fascio incontrano le analoghe dell'altro fascio in linea retta (Chasles, pag. 71). Ciò vedesi facilmente osservando che chiamata r la distanza fra i due centri, ed x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 le coordinate di quei tre punti di intersezione si hanno le:

$$\cot.m_1a_1 = \frac{x_1 - r}{y_1}\ ,\ \cot.m_1a_2 = \frac{x_1}{y_1}\quad \text{ec.}\ldots$$

per cui quella seconda equazione diventa:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

cioè quei tre punti sono in linea retta.

Ciascuna delle suddette equazioni potrà rappresentare la involuzione di due fasci di quattro rette, allorquando si facciano coincidere opportunamente due rette di un fascio con due rette dell'altro. Quindi la involuzione potrà esprimersi con una delle equazioni:

$$\begin{vmatrix} 1\ , & \cot.a_2a_1\ , & \cot.a_1a_2 \\ 1\ , & \cot.a_2b_1\ , & \cot.a_1b_2 \\ 1\ , & \cot.a_2c_1\ , & \cot.a_1c_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ ec.}$$

Se si immagina una retta che seghi quelle sei rette a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 e si indicano con α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2

i sei punti di intersezione, con O il punto di concorso delle sei rette, e con m, n gli angoli che quella trasversale fa colle rette a_1, a_2 si hanno le equazioni :

$$\cot.a_2a_1 = \frac{O\alpha_2}{\alpha_2\alpha_1}\frac{1}{\text{sen}.n} - \cot.n,\ \cot.a_1a_2 = \frac{O\alpha_1}{\alpha_1\alpha_2}\frac{1}{\text{sen}.m} - \cot.m,$$

$$\cot.a_2b_1 = \frac{O\alpha_2}{\alpha_2\beta_1}\frac{1}{\text{sen}.n} + \cot.n,\ \cot.a_1b_2 = \frac{O\alpha_1}{\alpha_1\beta_2}\frac{1}{\text{sen}.m} - \cot.m$$

$$\cot.a_2c_1 = \frac{O\alpha_2}{\alpha_2\gamma_1}\frac{1}{\text{sen}.n} + \cot.n,\ \cot\,a_1c_2 = \frac{O\alpha_1}{\alpha_1\gamma_2}\frac{1}{\text{sen}.m} - \cot.m$$

e quindi sostituendo e riducendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha_2\alpha_1} & \frac{1}{\alpha_1\alpha_2} \\ 1 & \frac{1}{\alpha_2\beta_1} & \frac{1}{\alpha_1\beta_2} \\ 1 & \frac{1}{\alpha_2\gamma_1} & \frac{1}{\alpha_1\gamma_2} \end{vmatrix} = 0$$

la quale osservando la (10) si vede facilmente esprimere la involuzione di quei sei punti di intersezione (Chasles, p.172).

NOTA

L'ultima proposizione può generalizzarsi mediante il seguente teorema.

Se le prime polari, di una linea dell'ennesimo ordine, rispetto a tre punti dati si intersecano in un medesimo punto; i tre punti poli corrispondenti sono in una medesima retta. Sia $\varphi = 0$ l'equazione della linea; x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ; x_3, y_3, z_3 le coordinate di tre punti poli, saranno :

$$x_1 \frac{d\varphi}{dx} + y_1 \frac{d\varphi}{dy} + z_1 \frac{d\varphi}{dz} = 0$$

$$x_2 \frac{d\varphi}{dx} + y_2 \frac{d\varphi}{dy} + z_2 \frac{d\varphi}{dz} = 0$$

$$x_3 \frac{d\varphi}{dx} + y_3 \frac{d\varphi}{dy} + z_3 \frac{d\varphi}{dz} = 0$$

le equazioni delle tre polari. Se queste linee del grado $n-1$ si intersecano in uno stesso punto si ha :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

cioé ec.

Nello stesso modo si può dimostrare il teorema più generale.

Se le polari dell'ordine $n-r$, di una linea dell' ennesimo ordine, rispetto ad $\frac{(r+1)(r+2)}{2}$ punti dati si intersecano in un medesimo punto; gli $\frac{(r+1)(r+2)}{2}$ poli corrispondenti sono in una linea dell'erresimo ordine.

Coroll.° Se sei rette polari di una linea del terzo ordine si segano in uno stesso punto i sei poli corrispondenti sono situati in una conica

Un teorema analogo ha luogo per le superficie.

Questa proposizione è anche un caso particolare del teorema seguente dato dalla teorica delle polari reciproche.

Se la corda di contatto delle tangenti condotte da un punto dato ad una conica si muove conservandosi tangente ad una linea dell'ennesima classe o dell' $n(n-1)$ ordine,il punto descrive una linea dell'ennesimo ordine.

Se la linea alla quale conservasi tangente la corda di contatto sarà del secondo ordine, il punto descriverà una linea del secondo ordine (Giorgini — Poncelet).

Teoromi analoghi hanno luogo per le superficie del secondo ordine, ed i piani delle linee di contatto delle coniche circoscritte.

LETTERA
DEL SIG. PROF. GIUSEPPE BIANCHI AL COMPILATORE



Ch. Sig. Professore.

Nei miei recenti articoli pubblicati nel suo riguardevol Giornale, credo utile di rettificare una fallace asserzione sfuggitami nella fretta dello scrivere, a proposito del 3.° dei reclami che avanzai, e hanno veduto la luce col suo fascicolo degli Annali per l'Agosto del corrente 1853. Ivi a pagina 324, lin. 19 dissi l'argomento delle variazioni de' moti propri delle stelle non essere *dall'Humboldt neppure accennato;* il che non è vero; mentre anzi poco dopo le parole dell'autore del Cosmos, che riportai alla pagina 323, egli ricorda espressamente le osservazioni di Bessel sopra la variabilità dei moti proprj di Sirio e di Procione (Parte III. Traduz. di Faye, ediz. di Milano, 1851; pag. 165). Se non che limitato il cenno dei moti propri variabili alle sole due stelle nominate, e alla singolar ipotesi e spiegazione che ne promosse il grande astronomo di Konisberga, ne restano a mio vantaggio alcuni rilievi, che ora soggiungo.

E primieramente osservo che Bessel, secondo Humboldt, era condotto, nell'anno 1844, a rimarchevoli conseguenze dalle sue determinazioni dei detti moti variabili delle due stelle. Ora io qualche mese innanzi, e precisamente nel settembre del 1843 al Congresso scientifico di Lucca (Veggansi gli atti di tal Congresso a pag. 477 e seguente) aveva già presentato pubblicamente un Saggio di confronti di moti propri e di relative considerazioni sopra cinquanta stelle; confronti e considerazioni che poscia estesi a tutte le 220 stelle fondamentali del Catalogo di Piazzi, e successivamente a

tutte le stelle per me circompolari nell' ora O dello stesso Catalogo.

Rifletto in secondo luogo, che le variazioni secolari dei moti propri di Sirio e Procione, comecchè ben determinate e apprezzabili, non sono fra le maggiori tanto in ascensione retta che in declinazione. Con due intervalli di quasi mezzo secolo per ciascuno altre stelle me ne offerirono quantità molto maggiori. in ascension retta specialmente, alcune stelle in esempio di Cassiopea, α del Dragone, il cui moto proprio in ascension retta mi risultò cangiato di oltre mezzo secondo di arco, e più fortemente di tutte la η di Cefeo (fra li 220 fondamentali di Piazzi) che dall'uno all'altro intervallo dei confronti mi porse il moto proprio in ascension retta cangiato di presso a $1''$.

Quindi ne viene finalmente, che dovendosi pur considerare simili variazioni dei moti propri come fenomeni individuali, o appartenenti alle singole stelle, mentre un gran numero di altre stelle non le hanno che insensibili o nulle, nelle ricerche e per l'ipotesi della cagion fisica di tali variazioni, gioverà considerar di preferenza le stelle che ne spiegano più forti e indubitate le quantità, e ripeterne poi le prove de' risultamenti al maggior numero di casi, ossia di stelle. A questo riguardo la stella che forse più interessa di esaminare è nella costellazione di Cefeo la 43 di Evelio, ossia la 220 nell' O del Calatogo di Piazzi; tale stella di moto proprio notabilissimo, avendolo presentato eziandio molto differente a varie epoche moderne, e a diversi astronomi da Evelio incominciando, come altra volta fu da me avvertito (Raccolta scientifica del Palomba, *T.* II. pag. 156). Io non so se nei lavori più recenti di Fuss, di Struve, di Schubert e di Peters, da me non veduti e citati dall'Humboldt, per combattere o sostenere l'ipotesi di Bessel (Cosmos. Parte III. pag. 166), siansi estese le indagini ad altre stelle di moto pro-

prio variabile, fuóri delle due Sirio e Procione; ma certo non sono da ommettere quelle investigazioni ulteriori prima di poter ammettere con piena verosimiglianza la detta ipotesi, che cioè le stelle di moto proprio variabile sian vere stelle doppie, composte ciascuna di una stella visibile, e di una stella invisibile, e giranti intorno al comun centro di gravità.

Così rettificato, e maggiormente dichiarato il soggetto del mio terzo reclamo, non mi rimane se non confermarle i sensi della profonda stima coi quali sono

Della S. V. Ch.[ma]

Modena, 10 Ottobre 1853.

Dev.[mo] Serv.[e]
Giuseppe Bianchi

COMUNICAZIONE

DEL SIG. PROF. VOLPICELLI AL COMPILATORE



Signor Professore.

Prego perché si compiaccia Ella d'inserire nei suoi Annali la comunicazione seguente:

Continuando a ricercare sulla elettricità sviluppata nei corpi a cagione dell'allontanamento e dell'avvicinamento fra loro, il Sig. Prof. Volpicelli, dopo avere migliorato i mezzi conducenti allo sviluppo medesimo, ha ottenuto la scarica *luminosa*, cioé la scintilla elettrica, da una piccola bottiglia di Leida, tanto caricata colla elettricità degli allontanamenti, quanto con quella contraria degli avvicinamenti.

Questo effetto non erasi mai fino ad ora ottenuto, ed in vano il Professore medesimo lo cercò nelle prime sue spe-

rienze su tale argomento, pubblicate già dal celebre Arago nell'Accademia delle Scienze di Parigi.

Le principali atmosferiche circostanze che accompagnarono siffatto sperimento, eseguito nell'11 di questo mese, furono: cielo calmo e sereno; igrometro a capello 32°, essendo 100° il massimo di umidità; termometro secco 10°, 1; termometro bagnato 7°, 6; barometro $28^{p}, 3^{l}$.

I corpi consistevono in due dischi di rame, ognuno del raggio di $0^{m}, 05$ e della grossezza di $0^{m},002$, ambedue perfettamente isolati. E qui si noti che il moto dei corpi stessi nell'allontanarsi e nell'avvicinarsi fra loro fu sempre *orizzontale*; che il *contatto* fra i medesimi non ebbe mai luogo, e che la elettricità della carica non poteva in *verun modo* ripetersi dagli attriti.

Parecchie persone furono presenti a questa sperienza, fra le quali anche il ch. Sig. Prof. Carpi, che alla medesima fu invitato.

Il Professore Volpicelli in altra sua più estesa comunicazione, già presso ad essere pubblicata, sulla elettricità svolta nell'allontanarsi, e nell' avvicinarsi dei corpi fra loro, non solo metterà meglio in chiaro i particolari della riferita sperienza; ma farà pure noti altri nuovi fatti relativi a queste ricerche di elettrostatica, *direttamente* ravvisate, e promosse dal ch. Sig. Dottor Palagi di Bologna, e da lui praticate con molta utilità per la scienza.

Dal giornale di Roma del 12 Novembre 1853.



Rappresentazione geometrica di una funzione ellittica di prima specie per un'arco di una curva piana trascendente.

NOTA

DEL PROF. B. TORTOLINI



Sieno x, y le coordinate ortogonali di un punto di una certa curva piana, ed s l'arco corrispondente a partir da un punto fisso, φ un angolo variabile, e k una costante compresa fra 0, ed 1. É noto che l'espressione differenziale

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}}$$

rappresenta nel suo integrale una funzione ellittica di prima specie ; e che secondo le notazioni di Legendre, si scrive con

$$s = F(k, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}} .$$

Ora è molto facile trovare due valori di x, y considerati come coordinate ortogonali di una curva trascendente, le quali soddisfino al valore di ds; fra gli infiniti modi co' quali si può soddisfare sceglieremo

$$dx = \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}} , \qquad dy = \frac{\operatorname{sen} \varphi \, d\varphi}{\sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}}$$

l'angolo φ in questa guisa potrà rappresentare l'inclinazione della curva al punto (x, y). Integrando i due precedenti valori in guisa che a $\varphi = 0$ corrisponda $x = 0$, $y = 0$, si avrà

$$x = \frac{1}{k} \operatorname{arc.sen}(k \operatorname{sen} \varphi) , \quad \text{ovvero} \quad \operatorname{sen} kx = k \operatorname{sen} \varphi$$

$$y = \frac{1}{k} \log\left(\frac{1 + k}{k \cos \varphi + \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)}} \right)$$

L'eliminazione dell'angolo φ darà l'equazione della curva trascendente fra le coordinate ortogonali x, y, nella quale l'arco s si esprime per una funzione ellittica di prima specie.

La forma, e l'andamento della curva si scorgerà dai diversi valori dell'angolo φ; essa presenta una analogia singolare colla circonferenza di un circolo, e ad essa si riduce per valori particolari di k; così per $\varphi = 0$ avremo

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

Per $\varphi = 90°$, si avrà

$$x_1 = \frac{1}{k}\text{arc sen.}k, \quad y_1 = \frac{1}{k}\log\sqrt{\left(\frac{1+k}{1-k}\right)}, \quad \frac{dy}{dx} = \infty, \quad s_1 = F(k)$$

Per $\varphi = 180$, otterremo

$$x_2 = 0, y_2 = \frac{1}{k}\log\left(\frac{1+k}{1-k}\right) = 2y_1, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad s_2 = 2F(k) = 2s_1.$$

Per $\varphi = 270°$ verrà

$$x_3 = -\frac{1}{k}\text{ arc. sen.}k = -x_1,$$

$$y_3 = \frac{1}{k}\log\sqrt{\left(\frac{1+k}{1-k}\right)} = y_1, \quad \frac{dy}{dx} = -\infty, \quad s_3 = 3F(k) = 3s_1.$$

In fine per $\varphi = 360°$ otterremo

$$x_4 = 0, \quad y_4 = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad s_4 = 4F(k) = 4s_1.$$

La curva è composta di quattro rami eguali, e simili, che la racchiudono, sarà traversata da due assi nel centro paralleli a quelli delle x, e delle y, e di lunghezza

$$\frac{2}{k}\text{ arc.sen. }k, \quad \frac{1}{k}\log\left(\frac{1+k}{1-k}\right).$$

Questa curva si riduce ad un circolo di raggio 1 nell'ipotesi di k=0, ed allora i valori degli assi si ridurranno al diametro, come si vede dai limiti

$$\lim\frac{2}{k}\text{ arc. sen. }k = 2 = \lim.\ \frac{1}{k}\log\left(\frac{1+k}{1-k}\right).$$



SULL'INTEGRALE COMPLETO DELLA EQUAZIONE A DIFFERENZIALI PARZIALI DEL 2.° ORDINE

$$0=\left(1+\frac{dz^2}{dy^2}\right)\frac{d^2z}{dx^2}-2\frac{dz}{dx}\,\frac{dz}{dy}\,\frac{d^2z}{dxdy}+\left(1+\frac{dz^2}{dx^2}\right)\frac{d^2z}{dx^2}\ (*)$$

NOTA

DEL SIG. AB. REMIGIO DEL GROSSO

Si faccia per compendio di algoritmo

$$p=\frac{dz}{dx}\,,\ q=\frac{dz}{dy},\ r=\frac{d^2z}{dx^2},\ s=\frac{d^2z}{dxdy}\,,\ t=\frac{d^2z}{dy^2}\,,$$

e ponendo mente che

$$dp=rdx+sdy\,,\qquad dq=sdx+tdy\,,$$

la proposta equazione si traduce agevolmente in

$$0=(1+q^2)dp\,dy+(1+p^2)dq\,dx$$

$$-s\left[\,(1+q^2)dy^2+2pq\,dx\,dy+(1+p^2)dx^2\,\right].$$

Questa equazione, come si sa, può scindersi nelle altre due seguenti

$$0=\frac{dy}{dx}+\frac{1+p^2}{1+q^2}\cdot\frac{dq}{dp}$$

$$0=\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{2pq}{1+q^2}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{1+p^2}{1+q^2}\,,$$

(*) Sullo stesso argomento scrisse già l' Autore altra nota alla pag. 312 di questo volume. *B. T.*

nella seconda delle quali sostituendo il valore di $\frac{dy}{dx}$ ricavato dalla prima si ha

$$0 = \frac{1+p^2}{1+q^2}\frac{dq^2}{dp^2} - \frac{2pq}{1+q^2}\frac{dq}{dp} + 1,$$

sopprimendo il fattore $\frac{1+p^2}{1+q^2}$ comune a tutti i termini dell'equazione. Risolvendo questa equazione rispetto a $\frac{dq}{dp}$ si ottiene

$$(1) \qquad \frac{dq}{dp} = \frac{pq \pm i\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{1+p^2}$$

ove i rappresenta $\sqrt{-1}$.

A fine di separare le variabili nella (1) suppongasi

$$(k+q)^2 = 1+p^2+q^2,$$

esprimendo k una novella variabile. Ricavando da questa equazione il valore di q si ha

$$(2) \qquad q = \frac{1+p^2-k^2}{2k}$$

donde poi risulta

$$1+p^2+q^2 = \left(\frac{1+p^2+k^2}{2k}\right)^2$$

$$dq = \frac{2pk\,dp - (1+p^2+k^2)dk}{2k^2}$$

Sostituendo questi valori nella (1) si ottiene

$$\frac{2pk\,dp-(1+p^2+k^2)dk}{2k^2dp} = \frac{p(1+p^2-k^2) \pm i(1+p^2+k^2)}{2k(1+p^2)}$$

ovveramente

$$\frac{(1+p^2+k^2)\mathrm{d}k}{2k^2\mathrm{d}p}=\frac{(p\pm i)(1+p^2+k^2)}{2k(1+p^2)},$$

la quale si riduce a

$$\frac{\mathrm{d}k}{k}=\frac{\mathrm{d}p}{p\pm i}.$$

Se C rappresenta una costante arbitraria, il completo integrale di questa equazione è

$$k=\mathrm{C}(p\pm i)\ ;$$

e questo valore di k sostituito nella equazione (2) porge

$$q=\frac{(p+i)(p-i)-\mathrm{C}^2(p\pm i)^2}{2\mathrm{C}(p\pm i)},$$

dalla quale equazione risulta successivamente

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned} q&=\frac{p(1-\mathrm{C}^2)}{2\mathrm{C}}-\frac{i(1+\mathrm{C}^2)}{2\mathrm{C}}\\ q&=\frac{p(1-\mathrm{C}^2)}{2\mathrm{C}}+\frac{i(1+\mathrm{C}^2)}{2\mathrm{C}}\end{aligned}\right.$$

Or poichè l'integrale completo della equazione a differenziali parziali lineari del prim'ordine

$$\mathrm{P}p+\mathrm{Q}q=\mathrm{R}$$

è dalla forma

$$\mathrm{P}z-\mathrm{R}x=\mathrm{F}(\mathrm{P}y-\mathrm{Q}x).$$

quando P, Q, R sono costanti; gl' integrali completi delle (3) saranno

$$(4)\begin{cases}(C^2-1)z+(C^2+1)ix=F[(C^2-1)y-2Cx]\\(C^2-1)z-(C^2+1)ix=F_1[(C^2-1)y-2Cx]\end{cases}$$

rappresentando F, F_1 due funzioni arbitrarie diverse. Eliminando C fra queste due equazioni, si otterrà il completo integrale della nostra equazione. È da notarsi che il sistema dell'equazioni (4) è molto più semplice di quello dato dal Monge per rappresentare l'integrale completo della proposta equazione a differenziali parziali.

Napoli 29 Settembre 1853.

Elementi dell'orbita parabolica della cometa rinvenuta dal Sig. Bruhns a dì 11 Settembre del corrente anno 1853.

NOTA

DEL SIG. AB. REMIGIO DEL GROSSO

Passaggio al perielio... 1853, Ottob.16^g, 66406 t.m.di Greenwich
Distanza perielia .... = 0,174095
Longitudine del perielio = 302°. 16'. 23''. 0 } equinozio medio
Longitudine del nodo ☊ = 219°. 56'. 6''. 5 } di 0 settembre
Inclinazione . . . . = 60°. 50'. 58''. 3

Moto retrogrado.

Questi elementi sono stati calcolati sulle osservazioni degli 11 e 17 Settembre, e 1. Ottobre, e possono riguardarsi come molto prossimi ai veri, siccome risulta dalla seguente tavoletta di confronto fra le posizioni calcolate ed osservate di cotesto astro :

	AR. C—O	δ. C—O
14 Settembre	— 28'', 3	— 1'', 4
17 Settembre	— 53'', 7	— 1'', 2
21 Settembre	— 82'', 2	+ 31'', 6
23 Settembre	— 79'', 7	+ 36'', 8
28 Settembre	— 66'', 0	+ 1'', 5

Napoli 1 Novembre 1853.

INDICE DEGLI ARTICOLI



ELENCO DELLE TAVOLE

Tavola di figure di geometria per la Memoria del sig. R. Rubini dalla pag. 5. a tutta la pag. 24.

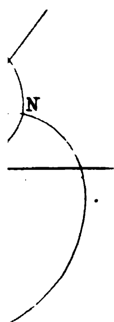
Tavola di figure di geometria per la Memoria del sig. Saverio Marchesano dalla pag. 161 a tutta la pag. 172.

PAG.	LIN.	ERRORI		CORREZIONI
9	12	ad otto	*leggi*	ai quattro
135	4	Esteriore		Inferiore
139	5	il fondo vi		si
ivi	4	98942.mm		9894mm, 2.
320	12	sa 2(Edi.		sa 2. Ediz.
321	10-11	prossima apparenza		prossime apparenze
ivi	22-23	ne otteni		ne ottenni
ivi	34	ottennti		ottenuti
322	8	mio scritto ?		mio scritto
ivi	14	*Correspondez*		*Correspondentz*
ivi	16	Nell'*Ammuire*		2. *Nell' Annuaire*
323	29	*Alcmanc*		*Almanac*
324	22	poco appreso		poco appresso
325	7	dotto e seguce		dotto, e sagace
326	15	tutte le cose ,		tutte le cose fisiche

ivi	27	spirando la	spirando da
329	16-17	illanguidandosi	illanguidendosi
330	22-23	abbandonare,	abbandonarci
402	12	dissimile	non dissimile
403	20	Potremo	Potremmo
413	5	$\int_0^\infty$	$\int_1^\infty$
414	16	finchè	sicchè
417	12	multiplo a $n-1$	multiplo, in cui x_1, x_2 .... x_{n-1} denotano $n-1$
419	6	. . . .	*si aggiunga alla fine della linea* $=1$
420	10	Moltiplicando	Moltiplicato
422	16	collegate in	collegate da
427	19	$(1-v^2)^{\frac{n}{2}}$	$(1-v^2)^{\frac{n}{2}-1}$
431	11	movendo	avendo
ivi	12	esprimano	esprimono
432	3	dicansi	dianzi
ivi	4	agolo	angolo
ivi	17-18	conosciute	conosciuta
436	17	per la quale	e nella quale
439	ultima	positive ; h	positive; siano h,
441	8	Determinando	Determinato
452	19	nel 10.°	nel num. 10.°

IMPRIMATUR
Fr. Dominicus Buttaoni Ord. Praed.
Sac. Pal. Ap. Mag.
IMPRIMATUR
Fr. Ant. Ligi Arch. Icon.
Vicesgerens.

. *Tav. 1.ª*



x

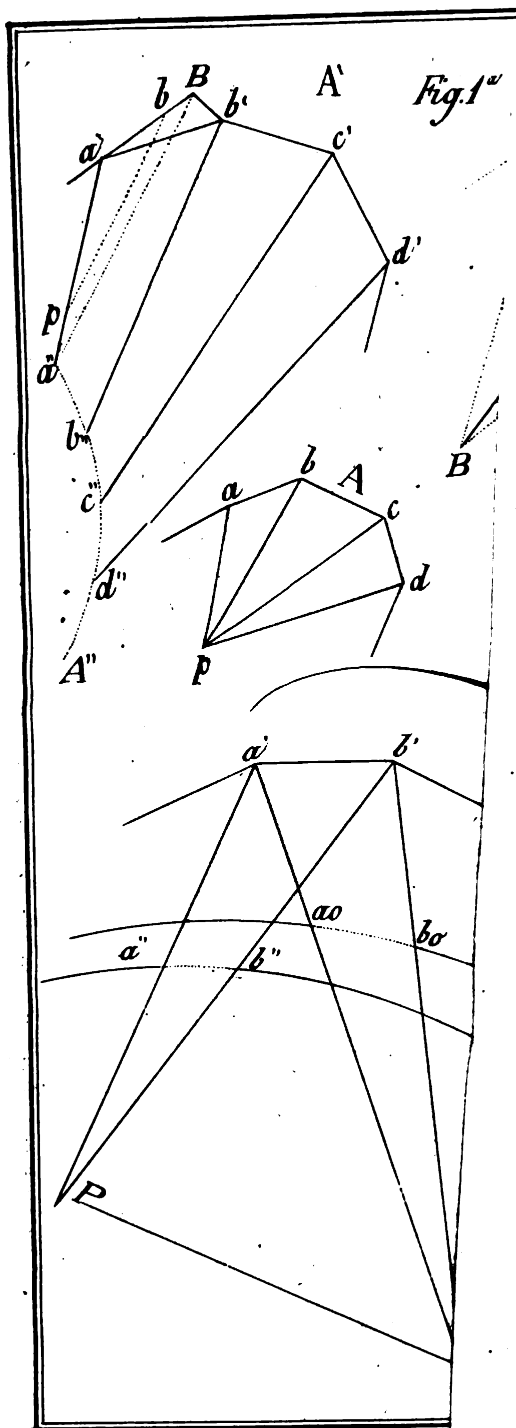
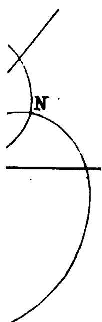
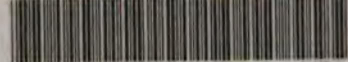


Fig. 1ª
A'
B
b
b'
a'
c'
d'
p
a''
b''
c''
d''
A''
a
b
A
c
d
p
B
a'
b'
ao
bo
a''
b''
P

3. *Tav. 1.ª*






3 2044 102 938 370